1 Домашнее задание

1.1 Прогерские задачи

На лекции было введено новое понятие — “доверительный интервал” (“confidence interval”, “c.i.”). Напомню, что доверительный интервал — это пара оценок $\{\widehat{\theta}^-, \widehat{\theta}^+)\}$ таких, что интервал $(\widehat{\theta}^-, \widehat{\theta}^+)$ с заданной вероятностью γ накрывает оцениваемый параметр θ. γ называется “уровнем доверия” и обычно выбирается равной 0.95. Если вероятность накрыть истинное значение не равна строго γ, а стремится к ней с ростом объема выборки N, то такой интервал называют асимтотическим. Если используется некоторая неасимтотическая аппроксимация, то такой интервал называют приближенным. Интервал, накрывающий оценку с вероятностью не менее чем заданное γ, называют консервативным.

Замечу, что оценкой (т.е. случайной величиной) здесь является сам интервал, а не оцениваемый параметр θ, поэтому говорить “оцениваемый параметр попадает в интервал с такой-то вероятностью” не совсем корректно (и вводит в заблуждение, параметр это константа).

Задание 1.1. Продолжим изучать интегрирование методом Монте-Карло. Напомню, что интеграл вычисляется как среднее одиночных оценок, где каждая оценка имеет вид

$$\eta_i = \frac{f(\xi_i)}{\rho_\xi(\xi_i)},$$

где ξ_i — случайная величина с плотностью ρ_ξ (называемой “интегрирующая плотность”).

Как мы выяснили ранее, от интегрирующей плотности зависит как порядок, так и скорость сходимости. В частности, оптимальная скорость достигается тогда, когда плотность повторяет поведение модуля интегрируемой функции. Особенно это касается поведения на бесконечности и в окрестности полюсов (особенностей).

Рассмотрим интеграл $\int_0^1 (\sin x)^{-2/3} dx$. Точное его значение можно получить, например, с помощью функции `integrate()` в `R` или `scipy.integrate` в Python. Этот интеграл можно оценить с помощью метода Монте-Карло, используя следующие плотности:

1. Равномерное распределение (можно смотреть на равномерное распределение как на Бета-распределение $\mathcal{B}(1, 1)$)
2. Бета-распределение $\mathcal{B}(1/3, 1)$
3. Бета-распределение $\mathcal{B}(1/2, 1/2)$

Уже было продемонстрировано, что первая плотность дает плохой порядок сходимости (потому что элементарная оценка не имеет дисперсии), вторая и третья дают одинаковый порядок (какой?), но сильно отличающуюся скорость.

Собственно, задание: для второй и третьей плотностей отдельно, нужно промоделировать $N = 10^7$ элементарных оценок и построить график накопленных оценок (накопленных средних). На этом графике построить два типа доверительных интервалов в нормальной модели: используя известную дисперсию элементарной оценки и используя накопленную оценку дисперсии. Уровень доверия γ следует взять 0.95. Также на графиках изобразить в виде горизонтальной линии точное значение интеграла — траектория должна к нему стремиться. *Рекомендую при построении графика при подборе* *масштаба по игрек-оси игнорировать первые 10% точек, потому что в начале траектория накопленных оценок очень неустойчива и имеет очень большую амплитуду, можно не разглядеть поведение в конце*

Напоминаю, что дисперсия одиночных оценок находится по формуле

$$\mathsf{D}\eta = \int \frac{f(x)^2}{\rho_\xi(x)}dx - \left(\int f(x)dx\right)^2.$$

Накопленные средние можно посчитать через накопленные суммы — `cumsum()` в `R` и `numpy.cumsum()` в Python.

Задание 1.2. Рассмотрим бросание монетки, т.е. испытания Бернулли.

Фиксируем некоторое p — степень гнутости монетки, вероятность выпадения 1, фиксируем некоторое M — число серий бросания и N — число бросков в серии. M разумно взять 1000, а N мы будем перебирать в геометрической прогрессии: $10, 100, \ldots, 10^5$. Для каждой серии бросков считаем количество орлов и по нему строим доверительный интервал для p четырьмя разными способами (уровень доверия фиксируем $\gamma = 0.95$).

Хинт. Не обязательно бросать монетку непосредственно и считать орлов. Можно сразу промоделировать биномиальное распределение. Это быстрее

Итак, получили M доверительных интервалов каждого типа для каждой длины выборки N. Посчитаем среднюю ширину доверительного интервала, выборочную дисперсию ширины и реальный эмпирический уровень доверия, т.е. долю тех случаев, когда интервал в самом деле накрыл истинное значение p.

Проделываем все это для $p = 0.5, 0.75, 0.99$. Выводим красиво в табличку и делаем выводы.

Типы доверительных интервалов следующие:

1. Честный-честный доверительный интервал через обращение ФР для биномиального распределения (aka Clopper-Pearson, лучше использовать вид через Бета-квантили)

2. Через арксинус (преобразование, нормализующее дисперсию, aka arcsine transformation)

3. Нормальный асимтотический доверительный интервал с решением квадратного неравентсва (aka Wilson score)

4. Нормальный асимтотический доверительный интервал с простой оценкой дисперсии (aka normal approximation)

Про все эти интервалы можно почитать на википедии: `http://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_proportion_confidence_interval`. Формулки там тоже есть, но интервал через арксинус описан не полностью (зато формула была дана на лекции).

1.2 Бумажные задачи

Задание 1.3. Найти медиану и MAD для обобщенного распределения Коши, т.е. распределения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\pi s \left(1 + \frac{(x-a)^2}{s^2}\right)}$$

Задание 1.4. Рассмотрим уже хорошо известную задачу про оценку параметра равномерного распределения $U[0,\, \theta]$ по выборке $X_1, \ldots, X_N$. Как известно, для этого случая есть несколько различных оценок с различными свойствами. Рассмотрим оценки "два средних" (т.е. ММ-оценку) и "максимум" (т.е. ОМП оценку). Эти оценки имеют разные свойства в силу того, что они имеют разное распределение (одна — асимтотически нормальное, вторая — Бета-распределение с масштабом, т.е. $\widehat{\theta}/\theta \sim \mathcal{B}(1, N)$). Пользуясь сведениями о распределении этих оценок, постройте два доверительных интервала для параметра θ. *Для такого Бета-распределения (распределения максимума) квантили легко находятся аналитически. В качестве упражнения можно рассмотреть доверительные интервалы, порождаемые другими оценками*

2 Разобранные задачи

3 Дополнительные задачи

Задание 3.1. Для *сдвинутого экспонциального* распределения с параметрами a, λ, т.е. такого распределения ξ, что $\xi - a \sim Exp(\lambda)$, построить оценки параметров по методу максимума правдоподобия *(было сделано в классе)*, для них аналитически найти MSE (или его асимтотику) и определить порядок сходимости.