Математическая логика и теория вычислимости Лекция 8. Исчисление предикатов гильбертовского типа

Денис Николаевич Москвин

Кафедра математических и информационных технологий
Санкт-Петербургского академического университета

12.04.2018

План лекции

1. Формулировка исчисления
2. Корректность исчисления
3. Вывод из гипотез
4. Леммы о константах
5. Теорема Гёделя о полноте
6. Понижение мощности
7. Невыразимые предикаты

План лекции

1. Формулировка исчисления
2. Корректность исчисления
3. Вывод из гипотез
4. Леммы о константах
5. Теорема Гёделя о полноте
6. Понижение мощности
7. Невыразимые предикаты

Формулы исчисления предикатов

- Напомним правила построения формул логики предикатов
  1. Фиксируется сигнатура, как набор функциональных и предикатных символов заданной арности.
  2. Из индивидных переменных с помощью функциональных символов строятся термы.
  3. Из термов с помощью предикатных символов строятся атомарные формулы.
  4. Из атомарных формул с помощью стандартных пропозициональных связок и кванторов получают формулы логики предикатов.
- Можно ли аналогично исчислению высказываний построить исчисление предикатов?
- То есть: задать аксиомы и правила вывода и получить в результате выводимыми все общезначимые формулы и только их?

Аксиомы исчисления предикатов

- Аксиомы, унаследованные от исчисления высказываний:
  1. $\varphi \to \psi \to \varphi$
  2. $(\varphi \to \psi \to \chi) \to (\varphi \to \psi) \to \varphi \to \chi$
  3. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$
  4. $\varphi \wedge \psi \to \psi$
  5. $\varphi \to \psi \to \varphi \wedge \psi$
  6. $\varphi \to \varphi \vee \psi$
  7. $\psi \to \varphi \vee \psi$
  8. $(\varphi \to \chi) \to (\psi \to \chi) \to \varphi \vee \psi \to \chi$
  9. $\neg\varphi \to \varphi \to \psi$
  10. $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi$
  11. $\varphi \vee \neg\varphi$
- Новые аксиомы:
  12. $\forall x \varphi \to \varphi(x := \tau)$
  13. $\varphi(x := \tau) \to \exists x \varphi$

  Требуется, чтобы указанные подстановки были корректными.

- Какие частные случаи аксиом
  12. $\forall x \varphi \to \varphi(x := \tau)$
  13. $\varphi(x := \tau) \to \exists x \varphi$

  можно выделить без оговорки о корректности подстановок?
- Всегда можно корректно подставлять константу данной сигнатуры (или, шире, любой терм без переменных).
- Всегда можно корректно подставлять вместо переменной x ее саму, то есть
  - $\forall x \varphi \to \varphi$
  - $\varphi \to \exists x \varphi$

  являются аксиомами.

Правила вывода

- Modus ponens по-прежнему работает

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}$$

- Помимо этого имеются еще два *правила Бернайса*

$$\frac{\psi \to \varphi}{\psi \to \forall x \varphi} \quad (\mathrm{B}\forall)$$

$$\frac{\varphi \to \psi}{\exists x \varphi \to \psi} \quad (\mathrm{B}\exists)$$

Требуется, чтобы переменная x не была свободна в ψ.

Правило обобщения

- **Утверждение.** Допустимо производное *правило обобщения*:

$$\frac{\varphi}{\forall x \varphi} \qquad (\mathrm{Gen})$$

- **Доказательство.** Действительно, возьмём в качестве ψ заведомо выводимую формулу, например какую-либо аксиому с подставленными в нее замкнутыми формулами. Имеем:

$$\begin{array}{lll}
1 & \psi & \text{Assumption} \\
2 & \varphi & \text{Premise} \\
3 & \varphi \to \psi \to \varphi & \text{A1} \\
4 & \psi \to \varphi & \text{MP}(2)(3) \\
5 & \psi \to \forall x \varphi & \text{B}\forall(4) \\
6 & \forall x \varphi & \text{MP}(1)(5)\ \blacksquare
\end{array}$$

- Исчисление высказываний является полным, поэтому мы можем считать выводимым (в ИП) любой частный случай пропозициональной тавтологии.
- Например, выводимы

$$(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$$
$$(\varphi \to \psi) \to (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$$
$$(\varphi \wedge \psi \to \chi) \to (\varphi \to \psi \to \chi)$$
$$(\varphi \wedge \psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)$$

- Выведем, например, $\forall x\varphi \to \exists x\varphi$

1	$\forall x\varphi \to \varphi$	A12
2	$\varphi \to \exists x\varphi$	A13
3	$(\forall x\varphi \to \varphi) \to (\varphi \to \exists x\varphi) \to (\forall x\varphi \to \exists x\varphi)$	syllogism
4	$(\varphi \to \exists x\varphi) \to (\forall x\varphi \to \exists x\varphi)$	MP(1)(3)
5	$\forall x\varphi \to \exists x\varphi$	MP(2)(4)

Альтернативная формулировка исчисления

- **Утверждение.** Класс выводимых формул не измениться, если использовать (Gen) вместо $(B\forall)$ и $(B\exists)$ в качестве правил вывода, и добавить две дополнительные аксиомы
  14. $\forall x(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \forall x \varphi)$
  15. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x \varphi \to \psi)$

  (Как обычно, требуется, чтобы x не была свободна в ψ.)
- **Доказательство.** Покажем, например, что $(B\forall)$ допустимо, как производное правило:

1	$\psi \to \varphi$	Premise
2	$\forall x(\psi \to \varphi)$	Gen(1)
3	$\forall x(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \forall x \varphi)$	A14
4	$\psi \to \forall x \varphi$	MP(2)(3) ■

План лекции

1. Формулировка исчисления
2. Корректность исчисления
3. Вывод из гипотез
4. Леммы о константах
5. Теорема Гёделя о полноте
6. Понижение мощности
7. Невыразимые предикаты

Корректность исчисления предикатов

- Мы хотим доказать, что всякая формула, выводимая в исчислении предикатов, является общезначимой.
- Для этого мы должны проверить все аксиомы на общезначимость и все правила вывода на сохранение общезначимости.
- Аксиомы (A1-11) тривиально общезначимы.
- Правило Modus ponens сохраняет общезначимость.
- Остаются две новые аксиомы и правила Бернайса.

- **Лемма 1**. Для произвольных термов u и t и произвольной оценки π верно

$$[u(x := t)]_\pi = [u]_{\pi, x := [t]_\pi}$$

- **Доказательство.** Индукция по структуре терма.
  База:
  u – это переменная. Если x, то слева и справа $[t]_\pi$. Если не x (скажем y), то слева и справа $\pi(y)$.
  Индукционный переход:
  тривиально.
  ■

Лемма о подстановке в формулу

- **Лемма 2**. Для произвольных формулы φ, терма t и произвольной оценки π верно

$$[\varphi(x := t)]_\pi = [\varphi]_{\pi, x := [t]_\pi}$$

если подстановка t вместо x в φ корректна.

- **Доказательство.** Индукция по структуре формулы.
  База:
  φ – атомарная формула. Следует из Леммы 1.
  Индукционный переход:
  Для пропозициональных связок тривиально.
  Пусть φ имеет вид $\forall y \psi$, причем x свободен в ψ (иначе — тривиально). По условию подстановка t вместо x в φ корректна, то есть y не свободен в t, откуда подстановка t вместо x в ψ корректна. (см. след. слайд)

Лемма о подстановке в формулу (продолжение)

$$[(\forall y \psi)(x := t)]_\pi = [\forall y(\psi(x := t))]_\pi =$$

$$= \bigwedge_d [\psi(x := t)]_{\pi, y:=d} = \qquad \text{(IH)}$$

$$= \bigwedge_d [\psi]_{\pi, y:=d, x:=[t]_{\pi, y:=d}} = \qquad (y \notin FV(t))$$

$$= \bigwedge_d [\psi]_{\pi, y:=d, x:=[t]_\pi} =$$

$$= \bigwedge_d [\psi]_{\pi, x:=[t]_\pi, y:=d} =$$

$$= [\forall y(\psi)]_{\pi, x:=[t]_\pi} =$$

$$= [\varphi]_{\pi, x:=[t]_\pi}$$

Для φ вида $\exists y \psi$ аналогично. ■

Общезначимость новых аксиом

- Рассмотрим аксиому 12

$$\forall x\varphi \to \varphi(x := \tau)$$

в произвольной интерпретации на произвольной оценке π.

- Пусть $[\forall x\varphi]_\pi = \text{T}$, тогда $[\varphi]_{\pi'} = \text{T}$ для любой π', отличной от π по x; в частности для π' равной $\pi, x := [\tau]_\pi$. Тогда по Лемме 2 $[\varphi(x := \tau)]_\pi = \text{T}$.
- Таким образом аксиома 12 истинна в произвольной интерпретации на произвольной оценке, то есть общезначима.
- Общезначимость аксиомы 13

$$\varphi(x := \tau) \to \exists x\varphi$$

аналогично.

Сохранение общезначимости в первом правиле Бернайса

- Рассмотрим первое правило Бернайса

$$\frac{\psi \to \varphi}{\psi \to \forall x \varphi} \qquad x \notin FV(\psi)$$

- Пусть $\psi \to \varphi$ общезначима. Покажем, что $\psi \to \forall x \varphi$.
- Рассмотрим произвольную интерпретацию и произвольную оценку π.
- Пусть $[\psi]_\pi = T$, тогда $[\psi]_{\pi, x := d} = T$ для любого d из носителя. Но тогда, поскольку $\psi \to \varphi$ общезначима, $[\varphi]_{\pi, x := d} = T$. Но это в точности означает, что $[\forall x \varphi]_\pi = T$.
- Таким образом первое правило Бернайса сохраняет общезначимость.

Сохранение общезначимости во втором правиле Бернайса

- Рассмотрим второе правило Бернайса

$$\frac{\varphi \to \psi}{\exists x \varphi \to \psi} \qquad x \notin FV(\psi)$$

- Пусть $\varphi \to \psi$ общезначима. Покажем, что $\exists x \varphi \to \psi$ общезначима.
- Рассмотрим произвольную интерпретацию и произвольную оценку π.
- Пусть $[\exists x \varphi]_\pi = \mathsf{T}$, тогда $[\varphi]_{\pi, x:=d} = \mathsf{T}$ для некоторого d из носителя. Но тогда, поскольку $\varphi \to \psi$ общезначима, $[\psi]_{\pi, x:=d} = \mathsf{T}$. Но ψ не зависит от x, то есть $[\psi]_\pi = \mathsf{T}$.
- Таким образом второе правило Бернайса сохраняет общезначимость.

Теорема о корректности исчисления предикатов

Итак, мы доказали следующий факт:

- **Теорема (о корректности ИП).** Любая формула, выводимая в исчислении предикатов, является общезначимой.

План лекции

1. Формулировка исчисления
2. Корректность исчисления
3. Вывод из гипотез
4. Леммы о константах
5. Теорема Гёделя о полноте
6. Понижение мощности
7. Невыразимые предикаты

Проблема с правилом обобщения

- В исчислении высказываний имело место лемма о дедукции: $\Gamma \vdash A \to B$ тогда и только тогда, когда $\Gamma, A \vdash B$.
- Однако правило (Gen) без дополнительных ограничений порождает проблемы в исчислении предикатов:

$$P(x) \vdash \forall x P(x) \qquad \text{ok, Gen}$$

$$\vdash P(x) \to \forall x P(x) \qquad ???$$

  Последнее необщезначимо.
- Очевидно, что Gen не стоит применять для связывания свободной переменной формулы-гипотезы.
- Иногда этот запрет формализуют явно, но часто удобнее требовать замкнутости гипотез.

Теории

- Произвольное множество замкнутых формул Γ сигнатуры σ называют *теорией* в этой сигнатуре.
- Говорят, что формула φ *выводима из* Γ (является *теоремой* теории Γ), если ее можно вывести, используя аксиомы и формулы из Γ; нотация

$$\Gamma \vdash \varphi$$

- Интерпретация $\mathcal{M}$ сигнатуры σ называется *моделью* теории Γ, если все формулы из Γ истинны в $\mathcal{M}$.

Лемма о дедукции. Пусть Γ — множество замкнутых формул и A — замкнутая формула. Тогда $\Gamma \vdash A \to B$ тогда и только тогда, когда $\Gamma, A \vdash B$.

Доказательство.

- Пусть $\Gamma \vdash A \to B$. Тогда и $\Gamma, A \vdash A \to B$, откуда из $\Gamma, A \vdash A$ по MP получаем искомый результат.
- Пусть $\Gamma, A \vdash B$. Рассмотрим вывод формулы B — последовательность формул

$$C_1, C_2, \dots, C_n$$

где C_n это B. Формула C_i может быть: (1) A, (2) из Γ, (3) аксиомой, (4) результатом применения MP к двум предыдущим, (5) результатом применения $B\forall$ к предыдущей формуле, (6) результатом применения $B\exists$ к предыдущей формуле.

Лемма о дедукции (продолжение доказательства)

Припишем ко всем формулам вывода посылку A и покажем, что эту цепочку можно расширить до вывода.

(1-4). Идентично случаю исчисления высказываний.

(5). В новой цепочке имеется переход от $A \to (\psi \to \varphi)$ к $A \to (\psi \to \forall x \varphi)$. Вставляем формулы

$$A \to \psi \to \varphi$$
$$A \wedge \psi \to \varphi$$
$$A \wedge \psi \to \forall x \varphi$$
$$A \to \psi \to \forall x \varphi$$

(6). В новой цепочке имеется переход от $A \to (\varphi \to \psi)$ к $A \to (\exists x \varphi \to \psi)$. Вставляем формулы

$$A \to \varphi \to \psi$$
$$\varphi \to A \to \psi$$
$$\exists x \varphi \to A \to \psi$$
$$A \to \exists x \varphi \to \psi$$

$\blacksquare$

- Если $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \subset \Delta$, то $\Delta \vdash A$.
- Если $\Gamma \vdash A$, то существует конечное $\Delta \subset \Gamma$, такое что $\Delta \vdash A$.
- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash A$ тогда и только тогда, когда

$$\vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to A$$

- **Теорема о корректности ИП (ver.2)**. Все теоремы теории Γ истинны в любой модели M этой теории.
- **Доказательство.** Пусть A — теорема Γ, тогда найдутся $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \in \Gamma$, такие что

$$\vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \to A$$

Эта формула выводима, значит истинна во всех интерпретациях (в т.ч. в M). Но в M истинны все φ_i (поскольку это модель), значит заключение импликации A тоже истинно. ∎

План лекции

1. Формулировка исчисления
2. Корректность исчисления
3. Вывод из гипотез
4. Леммы о константах
5. Теорема Гёделя о полноте
6. Понижение мощности
7. Невыразимые предикаты

Лемма о свежих константах

- **Лемма (о свежих константах).** Пусть φ — формула ИП, а c — константа, не входящая в эту формулу. Тогда выводимость $\varphi(x := c)$ влечет выводимость φ.
- **Доказательство.** Возьмем свежую для φ переменную y. Вывод $\varphi(x := c)$ при замене c на y останется выводом: $\vdash \varphi(x := y)$.

1	$\varphi(x := y)$	Assumption
2	$\forall y \varphi(x := y)$	Gen
3	$\forall y \varphi(x := y) \to \varphi(x := y)(y := x)$	A12
4	$\varphi(x := y)(y := x)$	MP(2)(3)
5	φ	

$\blacksquare$

- Лемма легко обобщается на случай нескольких констант.

- **Лемма (о добавлении констант)**. Пусть φ — формула ИП некоторой сигнатуры σ. Пусть она выводима в сигнатуре σ', полученной из σ добавлением новых констант. Тогда φ выводима в ИП сигнатуры σ.
- **Доказательство**. Если в выводе формулы φ в σ' встречаются новые константы, заменяем их на свежие переменные. ■
- Лемма легко обобщается для произвольного расширения сигнатуры.
- Это означает, что можно говорить о выводимости формулы, не уточняя, в какой сигнатуре мы ищем вывод.

План лекции

1. Формулировка исчисления
2. Корректность исчисления
3. Вывод из гипотез
4. Леммы о константах
5. Теорема Гёделя о полноте
6. Понижение мощности
7. Невыразимые предикаты

Противоречивые теории

- Фиксируем сигнатуру σ и рассмотрим теорию Γ в этой сигнатуре.
- Теория Γ называется *противоречивой*, если в ней выводима некоторая формула и ее отрицание. В противном случае теория называется *непротиворечивой*.
- В противоречивой теориии выводима любая формула:

1	$\Gamma \vdash \varphi$	Assumption
2	$\Gamma \vdash \neg\varphi$	Assumption
3	$\Gamma \vdash \neg \vdash \varphi \to \varphi \to \psi$	A9
4	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	MP(2)(3)
5	ψ	MP(1)(4)

- Любое подмножество непротиворечивого множества непротиворечиво.
- У бесконечного противоречивого множества есть конечное противоречивое подмножество.

Совместность

- Интерпретация $\mathcal{M}$ сигнатуры σ называется *моделью* теории Γ, если все формулы из Γ истинны в $\mathcal{M}$.
- **Теорема о корректности ИП (ver.2)**. Все теоремы теории Γ истинны в любой модели $\mathcal{M}$ этой теории.
- Множество формул Γ называют *совместным*, если оно имеет модель.
- **Теорема о корректности ИП (ver.3)**. Любое совместное множество замкнутых формул непротиворечиво.
  Доказательство. (от противного) Пусть имеется замкнутая φ, такая что $\Gamma \vdash \varphi$ и $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Но из совместности следует наличие модели $\mathcal{M}$, в которой φ и $\neg\varphi$ должны быть истинны одновременно. ■

Полнота теории

- Теория Γ в сигнатуре σ называется *полной* в этой сигнатуре если для любой замкнутой формулы φ этой сигнатуры либо φ, либо $\neg\varphi$ является теоремой теории Γ:

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \text{or} \quad \Gamma \vdash \neg\varphi$$

- Фиксация сигнатуры важна: если символ S не входит в сигнатуру σ, но используется в формуле ψ, то $\Gamma \nvdash \psi$ и $\Gamma \nvdash \neg\psi$, например

$$\Gamma \nvdash \exists x S(x) \qquad \Gamma \nvdash \neg\exists x S(x)$$

- Замкнутость формулы φ тоже важна: множество истинных формул сигнатуры $(0^0, S^1, =^2)$ полно, но ни $x = y$, ни $\neg(x = y)$ из него не выводимо.

Цель и план

- Цель — доказать, что **любая непротиворечивая теория совместна**.
- Как это делалось в логике высказываний:
  1. расширяли Γ до полного множества $\Delta \supset \Gamma$;
  2. для всякой пропозициональной переменной p полагали

$$p = T, \quad \text{if } \Delta \vdash p,$$

$$p = F, \quad \text{if } \Delta \vdash \neg p;$$

  3. показывали, что такое означивание приводит к истинности всех формул Δ (а значит и Γ).
- В логике предикатов будем действовать по той же схеме.
- Однако, у нас будут проблемы с шагом 2: нам нужно будет как-то смонтировать носитель интерпретации.

- **Лемма (о пополнении).** Всякое непротиворечивое множество Γ сигнатуры σ содержится в непротиворечивом полном множестве Δ той же сигнатуры.
- **Доказательство.** Пусть φ произвольная формула сигнатуры σ. Рассмотрим Γ, φ и $\Gamma, \neg\varphi$. Одно из них непротиворечиво. Действительно, если противоречивы оба, то $\Gamma \vdash \neg\varphi$ и $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$, что противоречит непротиворечивости Γ. Будем теперь перебирать все допустимые формулы, добавляя к Γ либо формулу, либо отрицание, сохраняя непротиворечивость. ■

- Для работы с семантическим понятием совместности нам нужно задать некоторую интерпретацию. Возьмем в качестве носителя T множество всех замкнутых термов нашей сигнатуры σ.
- Функциональные символы при этом интерпретируются "естественным образом": функциональному символу f арности n ставится в соответствие такая функция $[f]$

$$[f]([t_1], \ldots, [t_n]) = [f(t_1, \ldots, t_n)]$$

Здесь $t_1, \ldots, t_n$ и $f(t_1, \ldots, t_n)$ — замкнутые термы нашей сигнатуры (то есть элементы носителя D).
- Предикатный символ P арности n интерпретируем как предикат $[P]$, который истинен на замкнутых термах $t_1, \ldots, t_n$, если

$$\Gamma \vdash P(t_1, \ldots, t_n)$$

- Наша цель — доказать (индуктивно по структуре формулы), что в построенной интерпретации истинны все формулы из Γ.
- Но наша интерпретация может быть слишком бедной: может оказаться, что $\Gamma \vdash \exists x A(x)$, но ни для какого замкнутого терма t формула $A(t)$ не выводима из Γ.
- Теория Γ называется *экзистенциально полной* в сигнатуре σ, если для всякой замкнутой формулы $\exists x \varphi$, являющейся теоремой этой сигнатуры, найдется терм t этой сигнатуры, такой что $\Gamma \vdash \varphi(x := t)$.

Лемма об экзистенциальном пополнении

- **Лемма (об экзистенциальном пополнении).** Пусть Γ — непротиворечивое множество замкнутых формул сигнатуры σ, причем из Γ выводима замкнутая формула $\exists x \varphi$. Пусть c — свежая для Γ и φ константа. Тогда множество $\Gamma, \varphi(x := c)$ непротиворечиво.
- **Доказательство.** Пусть $\Gamma, \varphi(x := c)$ противоречиво. Тогда имеется конечное $\Delta \subset \Gamma$, такое что

1	$\Delta \vdash \neg\varphi(x := c)$	
2	$\Delta \vdash \neg\varphi$	FreshConstLemma
3	$\vdash \bigwedge_i \Delta \to \neg\varphi$	DeductLemma
4	$\vdash \varphi \to \neg(\bigwedge_i \Delta)$	Contraposition
5	$\vdash \exists x \varphi \to \neg(\bigwedge_i \Delta)$	B$\exists$

Но по условию $\Gamma \vdash \exists x \varphi$, значит Δ противоречиво, а значит и Γ. Противоречие. ■

Лемма о расширении

- **Лемма.** Пусть Γ — непротиворечивое множество замкнутых формул сигнатуры σ. Тогда существует расширение сигнатуры σ новыми константами и расширение множества Γ до множества Δ, такого что оно непротиворечиво, полно и экзистенциально полно в расширенной сигнатуре.
- **Доказательство.**
  1. Последовательно применим лемму об экзистенциальном пополнении ко всем замкнутым формулам вида $\exists x \varphi$, выводимым из Γ.
  2. Пополним это множество, применив лемму о пополнении.

  Повторим эти два шага счетное число раз. Объединение полученных множеств будет непротиворечивым, полным и экзистенциально полным. ∎

Лемма о существовании модели

Лемма. Пусть Γ — полное и экзистенциально полное множество замкнутых формул сигнатуры σ. Тогда существует интерпретация M сигнатуры σ, в которой истинны все формулы из Γ.

Доказательство. Возьмем в качестве носителя M все замкнутые термы сигнатуры σ. Интерпретация функциональных и предикатных символов описана ранее. Индукцией по числу связок и кванторов формулы φ докажем

$$\Gamma \vdash \varphi \;\Leftrightarrow\; [\varphi] = \mathsf{T}$$

База. Атомарные формулы таковы по построению (см. интерпретацию предикатных символов).

Лемма о существовании модели (продолжение)

Индукционный переход. (пропозициональные связки) Аналогично доказательству для исчисления высказываний. Проверяем, что выводимость и истинность "устроены одинаково"

$$\begin{array}{rcl} \Gamma \vdash \neg\varphi & \Leftrightarrow & \Gamma \nvdash \varphi \\ \Gamma \vdash \varphi \vee \psi & \Leftrightarrow & \Gamma \vdash \varphi \text{ or } \Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \varphi \wedge \psi & \Leftrightarrow & \Gamma \vdash \varphi \text{ and } \Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \varphi \to \psi & \Leftrightarrow & \Gamma \nvdash \varphi \text{ and } \Gamma \vdash \psi \end{array}$$

Это легко показать, поскольку любые частные случаи пропозициональных тавтологий выводимы.

Индукционный переход. (кванторы) Пусть φ имеет вид $\exists x\psi$ (в ψ единственный параметр — x).
($\Rightarrow$) Пусть $\Gamma \vdash \exists x\psi$. Из экзистенциальной полноты Γ следует существование константы c, такой что $\Gamma \vdash \psi(x := c)$. В этой формуле меньше связок, то есть по (IH) в M она истинна: $[\psi(x := c)] = \mathsf{T}$. Тогда ψ истинна на оценке $\pi(x) = c$, откуда $[\exists x\psi] = \mathsf{T}$.
($\Leftarrow$) Пусть $[\exists x\psi] = \mathsf{T}$. Тогда найдется элемент носителя (у нас — замкнутый терм t), для которого $[\psi]_{x:=t} = \mathsf{T}$. Отсюда в нашей интерпретации $[\psi(x := t)] = \mathsf{T}$. По (IH) $\Gamma \vdash \psi(x := t)$, откуда, используя аксиому 13 $\psi(x := t) \to \exists x\psi$, заключаем, что $\Gamma \vdash \exists x\psi$.
Для $\Gamma \vdash \forall x\psi \;\Leftrightarrow\; [\forall x\psi] = \mathsf{T}$ — аналогично. ■

- **Теорема** Непротиворечивое множество замкнутых формул имеет модель.
  Доказательство. Расширяем множество до полного и экзистенциально полного и берем в качестве модели построенную выше интерпретацию ■.
- **Теорема о полноте ИП (сильная форма)** Любая непротиворечивая теория совместна.
- **Теорема о полноте ИП (слабая форма)** Любая общезначимая формула выводима в исчислении предикатов.
  Доказательство. Пусть φ общезначима, замкнута и невыводима. Тогда $\{\neg\varphi\}$ непротиворечиво, а значит имеет модель. В этой модели $[\neg\varphi] = \mathsf{T}$, откуда $[\varphi] = \mathsf{F}$, что противоречит общезначимости φ. ■.

- **Теорема (о компактности)** Пусть Γ — бесконечное множество замкнутых формул сигнатуры σ. Пусть любое его конечное подмножество имеет модель. Тогда само Γ тоже имеет модель.
- **Доказательство.** Наличие модели равносильно непротиворечивости. Но противоречие выводится из конечного числа формул Γ. $\blacksquare$

План лекции

1. Формулировка исчисления
2. Корректность исчисления
3. Вывод из гипотез
4. Леммы о константах
5. Теорема Гёделя о полноте
6. Понижение мощности
7. Невыразимые предикаты

Элементарная эквивалентность

- Две интерпретации заданной сигнатуры σ называют **элементарно эквивалентными**, если в них истинны одни и те же замкнутые формулы данной сигнатуры.
- Взаимно-однозначное отображение $\alpha : D_1 \to D_2$ называется *изоморфизмом* интерпретаций, если оно сохраняет все функции и предикаты этих интерпретаций. А именно для любого предикатного символа P^n и любого функционального символа f^n верно

$$
\begin{aligned}
[P]_2\left(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)\right) &\Leftrightarrow [P]_1\left(x_1, \ldots, x_n\right) \\
[f]_2\left(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)\right) &= \alpha([f]_1\left(x_1, \ldots, x_n\right))
\end{aligned}
$$

  на любых наборах $x_1, \ldots, x_n \in D_1$.
- **Теорема.** Изоморфные интерпретации элементарно эквивалентны.

Теорема об элементарной подмодели

- Пусть имеется интерпретация некоторой сигнатуры с ностиелем D. Рассмотрим подмножество $\mathrm{D}' \subset \mathrm{D}$. Если D' замкнуто относительно сигнатурных функций, то получится новая интерпретация, называемая *подструктурой* исходной.
- **Теорема (Левенгейм-Сколем).** Пусть дана конечная или счетная сигнатура σ и ее бесконечная интерпретация с носителем D. Тогда имеется подструктура со счетным носителем $\mathrm{D}' \subset \mathrm{D}$ элементарно эквивалентная исходной.
- **Доказательство (скетч).** Берем произвольное счетное подмножество, расширяем его до замкнутого относительно сигнатурных функций и экзистенциально замкнутого. Повторяем счетное число раз. ■ (см. Верещагин, Шень, ЯиИ, 3.11)

План лекции

1. Формулировка исчисления
2. Корректность исчисления
3. Вывод из гипотез
4. Леммы о константах
5. Теорема Гёделя о полноте
6. Понижение мощности
7. Невыразимые предикаты

Выразимость предикатов

- Выразимость предиката в некоторой интерпретации некоторой сигнатуры доказать обычно просто: прямым предъявлением.
- Например, сигнатура $(+^2, =^2)$; нормальная интерпретация с носителем $\mathbb{N}$ и $[+] = +$.
- Порядок на натуральных числах (отношение $\leqslant$) мы можем выразить так:

$$x \leqslant y \ \equiv \ \exists z(y = x + z)$$

Выразимость предикатов

- Выразимость предиката в некоторой интерпретации некоторой сигнатуры доказать обычно просто: прямым предъявлением.
- Например, сигнатура $(+^2, =^2)$; нормальная интерпретация с носителем $\mathbb{N}$ и $[+] = +$.
- Порядок на натуральных числах (отношение $\leqslant$) мы можем выразить так:

$$x \leqslant y \ \equiv \ \exists z(y = x + z)$$

- Что будет если поменять носитель на $\mathbb{Z}$?

Выразимость предикатов

- Выразимость предиката в некоторой интерпретации некоторой сигнатуры доказать обычно просто: прямым предъявлением.
- Например, сигнатура $(+^2, =^2)$; нормальная интерпретация с носителем $\mathbb{N}$ и $[+] = +$.
- Порядок на натуральных числах (отношение $\leqslant$) мы можем выразить так:

$$x \leqslant y \;\equiv\; \exists z(y = x + z)$$

- Что будет если поменять носитель на $\mathbb{Z}$?
- Порядок станет невыразимым!

Автоморфизмы

- Пусть дана сигнатура σ и ее интерпретация с носителем D.
- Взаимно-однозначное отображение $\alpha : D \to D$ называется *автоморфизмом* интерпретации, если все функции и предикаты этой интерпретации *устойчивы* относительно α, а именно для любого предикатного символа P^n и любого функционального символа f^n верно

$$\begin{array}{rcl} [P]\left(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)\right) & \Leftrightarrow & [P]\left(x_1, \ldots, x_n\right) \\ [f]\left(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)\right) & = & \alpha([f]\left(x_1, \ldots, x_n\right)) \end{array}$$

  на любых наборах $x_1, \ldots, x_n \in D$.
- Например, отображение $x \mapsto -x$ является автоморфизмом для нормальной интерпретация сигнатуры $(+^2, =^2)$ с носителем $\mathbb{Z}$ и $[+] = +$.

Теорема об устойчивости относительно автоморфизмов

- **Теорема.** Предикат, выразимый в данной интерпретации, устойчив относительно ее автоморфизмов.
- **Доказательство.**
  - Рассмотрим произвольную оценку π и обозначим $\alpha \circ \pi$ новую оценку, полученную применением автоморфизма к π.
  - Индукцией по структуре терма показываем

$$[t]_{\alpha\circ\pi} = \alpha\left([t]_\pi\right)$$

  - Индукцией по структуре формулы показываем

$$[\varphi]_{\alpha\circ\pi} = \alpha\left([\varphi]_\pi\right) \quad \blacksquare$$

- Теперь невыразимость предиката легко доказать, предъявив автоморфизм, относительно которого предикат неустойчив.
- Например, сигнатура $(<^2, =^2)$, носитель $\mathbb{Z}$, естественная интерпретация. Невыразимый предикат $x = 0$. Автоморфизм —

- **Теорема.** Предикат, выразимый в данной интерпретации, устойчив относительно ее автоморфизмов.
- **Доказательство.**
  - Рассмотрим произвольную оценку π и обозначим $\alpha \circ \pi$ новую оценку, полученную применением автоморфизма к π.
  - Индукцией по структуре терма показываем
  $$[t]_{\alpha\circ\pi} = \alpha([t]_\pi)$$
  - Индукцией по структуре формулы показываем
  $$[\varphi]_{\alpha\circ\pi} = \alpha([\varphi]_\pi) \quad \blacksquare$$
- Теперь невыразимость предиката легко доказать, предъявив автоморфизм, относительно которого предикат неустойчив.
- Например, сигнатура $(<^2, =^2)$, носитель $\mathbb{Z}$, естественная интерпретация. Невыразимый предикат $x = 0$.
  Автоморфизм — $x \mapsto x + 42$.