

Дополнительные задачи по математическому анализу на 17 апреля

Тема: интегральные суммы, теоремы о среднем, применение определённых интегралов, несобственные интегралы

1. Докажите, что при $x > 0$

а) (2 балла) если $F(x) = \int_x^{x+1} \sin(t^2) dt$, то $|F(x)| \leq 1/x$;

б) (2 балла) если $F(x) = \int_x^{x+1} \sin(e^t) dt$, то $|F(x)| \leq 2/(e^x)$.

2. (2 балла) Вычислите при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(x)}{\sin^n(x) + \cos^n(x)} dx.$$

3. (1 балл) Исследуйте сходимость

$$\int_0^{\infty} \sin(x \ln(x)) dx.$$

4. (2 балла) Вычислить при $k \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{+\infty} u^k u^{-\ln u} \sin(2\pi \ln u) du$$

5. (2 балла) Найдите предел

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1+t^n}.$$

6. (2 балла) Пусть функции f и g интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$. Докажите неравенство:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

7. (2 балла) Пусть функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$. Докажите неравенство:

$$\left(\int_a^b f(x) \cos(x) dx \right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \sin(x) dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

8. (1 балл) Пусть $f \in C([0; 1])$ и $|f(x)| \leq 1$ при $x \in [0; 1]$. Докажите, что

$$\int_0^1 \sqrt{1-f^2(x)} \leq \sqrt{1 - \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2}.$$