

1. Нарисуйте эскизы графиков

а) (1)  $y(x) = \frac{1}{e^x \sin x}$ ;

б) (1)  $x^2 + y^2 = (x^2 - y^2)^2$ ;

в) (1)  $|y| = |\log_2(|x| + 2) - 3| - \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{4}\right)$ .

2. Найдите предел и явно укажите  $N(\varepsilon)$  (или  $N(M)$ , если предел бесконечен) для последовательностей

а) (1)  $x_n = \frac{n^2 + \sqrt{n} \sin(n)}{n^2 + \cos(n^3)}$ ;

б) (1)  $x_n = \sqrt[n]{n!}$ ;

в) (1)  $x_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+10)}{(n-1)(n-2)\dots(n-10)}$ ;

г) (1)  $x_n = n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n})$ .

3. Найти все частичные пределы последовательностей

а) (2)  $x_n = \sin(\sqrt{10}\pi n^2)$ ;

б) (1)  $y_n = \cos\left(\frac{\pi}{n} + \pi n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{n^2} + \frac{\pi n^2}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{n^3} + \frac{\pi n^3}{3}\right)$ .

в) (1) У последовательности  $y_n$  найдите точные верхнюю и нижнюю границы.

4. Найдите предел или докажите, что его не существует у последовательностей

а) (2)  $\sin(\sqrt{10}\pi n^3)$ ;

б) (2)  $\operatorname{tg}(\pi \ln n)$ ;

в) (2)  $\operatorname{tg}(2^{n+1/2}\pi)$ .

5. (2) Последовательность положительных чисел  $a_n$  такова, что для любых  $m, n$  выполнено неравенство  $a_{m+n} \leq a_n + a_m$ . Докажите, что последовательность  $\frac{a_n}{n}$  имеет предел и он равен  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$ .

6. (1) Последовательность  $x_n$  задана рекуррентно:  $x_0 = a$ ,  $x_1 = b$ ,  $x_{n+1} = \frac{9x_n + 2x_{n-1}}{5}$ . При каких вещественных значениях  $a$  и  $b$  последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел?

7. (2) Последовательность  $x_n$  задана следующим образом:  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$  и  $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n^2 x_{n-1}}$  при  $n > 1$ . Докажите, что последовательность  $x_n$  сходится и найдите ее предел.

8. а) (2) Приведите пример такой ограниченной расходящейся последовательности  $\{x_n\}$ , что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$ .

б) (3) Существует ли такая ограниченная последовательность, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$ , но последовательность  $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$  не имеет предела.