Курс: Функциональное программирование
Практика 3. Просто типизированное λ-исчисление.

Разминка

▶ Придумайте контекст Γ, в котором верны утверждения типизации

$$\begin{array}{l}
\Gamma \vdash x : \alpha \\
\Gamma \vdash x\,y : \alpha \\
\Gamma \vdash x\,y : \alpha \to \beta \\
\Gamma \vdash \lambda x.\, y : \alpha \to \alpha \to \alpha \\
\Gamma \vdash \lambda x.\, y : (\alpha \to \beta) \to \alpha \\
\Gamma \vdash \lambda x.\, x : (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha \to \alpha \\
\Gamma \vdash \lambda x.\, x : (\alpha \to \beta) \to \alpha
\end{array}$$

▶ Запишите приведённые выше утверждения типизации в стиле Чёрча.

Стандартные типы

▶ Какой тип можно приписать булевым значениям

$$\begin{array}{lcl}
\mathtt{tru} & \equiv & \lambda t\, f.\, t \\
\mathtt{fls} & \equiv & \lambda t\, f.\, f
\end{array}$$

▶ Какой тип можно приписать парам

$$\mathtt{pair} \equiv \lambda x\, y\, f.\, f\, x\, y$$

▶ Какой тип можно приписать числам Чёрча

$$\begin{array}{lcl}
\mathtt{0} & \equiv & \lambda s\, z.\, z \\
\mathtt{1} & \equiv & \lambda s\, z.\, s\, z \\
\mathtt{2} & \equiv & \lambda s\, z.\, s\,(s\, z) \\
\mathtt{3} & \equiv & \lambda s\, z.\, s\,(s\,(s\, z)) \\
\mathtt{4} & \equiv & \lambda s\, z.\, s\,(s\,(s\,(s\, z))) \\
 & \dots &
\end{array}$$

▶ Какой тип можно приписать спискам

$$[\,] \equiv \mathtt{nil} \equiv \lambda c\, n.\, n$$

$$[2] \equiv \mathtt{cons}\ 2\ \mathtt{nil} \equiv \lambda c\, n.\, c\ 2\ n$$

$$[3,2] \equiv \mathtt{cons}\ 3\ (\mathtt{cons}\ 2\ \mathtt{nil}) \equiv \lambda c\, n.\, c\ 3\ (c\ 2\ n)$$

$$[5,3,2] \equiv \mathtt{cons}\ 5\ (\mathtt{cons}\ 3\ (\mathtt{cons}\ 2\ \mathtt{nil})) \equiv \lambda c\, n.\, c\ 5\ (c\ 3\ (c\ 2\ n))$$

Вывод типа

Определите тип следующих комбинаторов

▶ $\mathbf{B} = \lambda f\, g\, x.\, f\,(g\, x)$

- $\mathbf{B}_* = \lambda f\,g\,x.\,g\,(f\,x)$
- $\mathbf{S} = \lambda f\,g\,x.\,f\,x\,(g\,x)$

Определите тип комбинаторов
- $\lambda x\,y.\,x\,(y\,x)$
- $\lambda x\,y.\,x\,y\,x$

Тип комбинатора неподвижной точки

Пусть мы решили расширить исчисление комбинатором неподвижной точки `fix` с правилом δ-конверсии

$$\mathtt{fix}\ f \ =_\delta\ f\,(\mathtt{fix}\ f)$$

Какой тип можно было бы ему приписать непротиворечивым образом?

Экспансия субъекта

Операция, обратная β-редукции называется экспансией (расширением). Множество типизируемых в $\lambda\!\to$ термов не замкнуто относительно экспансии:

$$M \twoheadrightarrow_\beta N \ \wedge\ \Gamma \vdash N : \sigma \ \not\Rightarrow\ \Gamma \vdash M : \sigma$$

Действительно, рассмотрим терм $\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega}$ ($\mathbf{I} \equiv \lambda x.\,x$, $\mathbf{K} \equiv \lambda x\,y.\,x$, $\mathbf{\Omega} \equiv \lambda x.\,x\,x$). Хотя $\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega} \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{I}$:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega} \ \to_\beta\ (\lambda y.\,\mathbf{I})\,\mathbf{\Omega} \ \to_\beta\ \mathbf{I}$$

и $\vdash \mathbf{I} : \sigma \to \sigma$, но $\nvdash \mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega} : \sigma \to \sigma$, поскольку последнее содержит нетипизируемый подтерм.

Для $\lambda\!\to$ а ля Чёрч экспансия не сохраняет тип только из-за возможного наличия нетипизируемого подтерма.

Для $\lambda\!\to$ а ля Карри верно более сильное отрицание:

$$M \twoheadrightarrow_\beta N \ \wedge\ \Gamma \vdash M : \sigma \ \wedge\ \Gamma \vdash N : \tau \ \not\Rightarrow\ \Gamma \vdash M : \tau$$

Покажем это на примере.

Возьмём $M \equiv \mathbf{S}\,\mathbf{K}$ и $N \equiv \mathbf{K}_*$.

$$\begin{array}{rl}
\mathbf{S} \equiv \lambda f\,g\,z.\,f\,z\,(g\,z) & \vdash \mathbf{S} : (\sigma \to \tau \to \rho) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho \\
\mathbf{K} \equiv \lambda x\,y.\,x & \vdash \mathbf{K} : \sigma \to \tau \to \sigma \\
 & \vdash (\mathbf{S}\,\mathbf{K}) : (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \sigma \\
\mathbf{K}_* \equiv \lambda x\,y.\,y & \vdash \mathbf{K}_* : \tau \to \sigma \to \sigma
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{S}\,\mathbf{K} & \to_\beta & \lambda g\,z.\,\mathbf{K}\,z\,(g\,z) \ \to_\beta \\
 & \to_\beta & \lambda g\,z.\,(\lambda y.\,z)\,(g\,z) \ \to_\beta\ \lambda g\,z.\,z \ \equiv_\alpha\ \mathbf{K}_*
\end{array}$$

В красной редукции потерялась информация о типе g, как о функциональном, $(g\,z) : \tau \Rightarrow z : \sigma,\ g : \sigma \to \tau$.

Для $\lambda\!\to$ в стиле Чёрча информация не теряется:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{S}_{\sigma\tau\rho} & \equiv & \lambda f^{\sigma\to\tau\to\rho}\, g^{\sigma\to\tau}\, z^{\sigma}.\, f\, z\, (g\, z) \\
\mathsf{K}_{\sigma\tau} & \equiv & \lambda x^{\sigma}\, y^{\tau}.\, x
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{S}_{\sigma\tau\sigma}\, \mathsf{K}_{\sigma\tau} & \to_\beta & \lambda g^{\sigma\to\tau}\, z^{\sigma}.\, \mathsf{K}_{\sigma\tau}\, z\, (g\, z) \;\to_\beta \\
& \to_\beta & \lambda g^{\sigma\to\tau}\, z^{\sigma}.\, (\lambda y^{\tau}.\, z)\, (g\, z) \;\to_\beta\; \lambda g^{\sigma\to\tau}\, z^{\sigma}.\, z \\
& \equiv_\alpha & \lambda x^{\sigma\to\tau}\, y^{\sigma}.\, y \;\equiv\; \mathsf{K}_{*(\sigma\to\tau)\sigma}
\end{array}
$$

Можно переименовать связанные переменные, но не их типы.

Домашнее задание

Типизируйте по Чёрчу (1 балл)
- ▶ $\mathsf{S\,K\,K}$
- ▶ $\mathsf{S\,K\,I}$

Найдите замкнутые термы, являющиеся обитателями типа (1 балл)
- ▶ $\alpha\to\beta\to\gamma\to\alpha$
- ▶ $\alpha\to\beta\to\gamma\to\beta$
- ▶ $\alpha\to\beta\to\alpha\to\alpha$
- ▶ $\alpha\to\alpha\to\alpha\to\alpha$

Сколько разных (с точностью до $\alpha\beta$-эквивалентности) термов каждого типа вы можете привести?

Найдите замкнутые термы, являющиеся обитателями типа (2 балла)
- ▶ $(\delta\to\delta\to\alpha)\to(\alpha\to\beta\to\gamma)\to(\delta\to\beta)\to\delta\to\gamma$
- ▶ $(\delta\to\delta\to\alpha)\to(\gamma\to\alpha)\to(\alpha\to\beta)\to\delta\to\gamma\to\beta$ (2 штуки)

Сконструируйте замкнутый терм типа
- ▶ $(\gamma\to\epsilon)\to((\gamma\to\epsilon)\to\epsilon)\to\epsilon$

которому нельзя было бы приписать тип $\alpha\to(\alpha\to\epsilon)\to\epsilon$. (2 балла)

Сконструируйте замкнутый терм типа (4 балла)
- ▶ $((\alpha\to\beta)\to\alpha)\to(\alpha\to\alpha\to\beta)\to\alpha$
- ▶ $((\alpha\to\beta)\to\alpha)\to(\alpha\to\alpha\to\beta)\to\beta$