ДЗ 4. Сопряжённые операторы

Итак, мы попробовали решить в прошлый раз задачу нахождения ближайшего в среднем подпространства к данным точкам. Рассмотрим матрицу X, чьи строки это данные вектора x_i $i \in \overline{1,s}$. Тогда утверждается, что задача сводится к последовательной минимизации формы $A = X^\top X$. Точнее, мы ищем аффинное подпространство $W = a_0 + L$, где $\dim W = k$ с условием, что

$$\sum_i \rho(x_i, W)^2$$

минимально. Тогда $a_0 = \frac{1}{s}\sum x_i$, а в качестве подпространства L можно взять $L = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, где v_i — собственные вектора A, причём соответствующие собственные числа упорядочены по убыванию.

Докажем это. Прежде всего установим, что в качестве a_0 всегда можно взять среднее. Действительно, выпишем условие $\sum_{i=1}^{s} \rho(x_i - a_0, L)^2 = \sum ||pr_{L^\perp}(x_i - a_0)||^2$ минимально. Продифференцируем. Получим

$$\sum -2pr_{L^\perp} x_i + 2pr_{L^\perp} a_0 = 0$$

Это условие означает, что проекции a_0 и среднего $\frac{1}{s}\sum x_i$ совпадают. То есть эти две величины отличаются на элемент L. Тогда среднее лежит в W. Итак, вычтя из всех x_i их среднее можно считать $a_0 = 0$.

Итак, теперь $a_0 = 0$. Воспользуемся тем, что $||x||^2 = ||pr_L x||^2 + ||pr_{L^\perp} x||^2$ или $||x||^2 - ||pr_L x||^2 = ||pr_{L^\perp} x||^2$. Тогда получаем, что

$$\sum ||pr_{L^\perp}(x_i)||^2 = \sum ||x_i||^2 - ||pr_L x_i||^2$$

должно быть минимально. Тогда сумма $\sum ||pr_L x_i||^2$ должна быть максимальна.

Предложение. *Максимум указанной суммы достигается на подпространстве $L = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ из первых k собственных векторов квадратичной формы $u^\top X^\top X u$.*

Теперь поговорим про сопряжённые операторы.

Факт (Общие свойства)**.** $(A+B)^* = A^* + B^*$
$(AB)^* = A^* B^*$
$(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.
$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Задачи

Задача 1. Пусть (e_1, e_2) – ортонормированный базис пространства и оператор A имеет в базисе $(e_1, e_1 + e_2)$ матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу оператора A^* в этом базисе.

Задача 2. Доказать, что если x – собственный вектор операторов A и A^* на унитарном пространстве (комплексном пространстве с полуторалинейным скалярным произведением) с собственными значениями λ и μ, то $\overline{\lambda} = \mu$.