

ML 48. Постройте две неизоморфные интерпретации теории $\text{Th}(\mathbb{Q}, <, =)$ (плотный линейный порядок без первого и последнего элемента) мощности континуум.

ML 49. В алгебре вам доказывали, что если K — некоторое поле, а многочлен $f \in K[x]$ неприводим, то существует K' надполем поля K , в котором многочлен f имеет корень (в качестве поля K' можно взять $K[x]/\langle f \rangle$, это кольцо является полем как фактор-кольцо по максимальному идеалу). С помощью теоремы о компактности покажите, что для всякого поля K существует его надполе K' такое, что каждый неконстантный многочлен с коэффициентами из K имеет корень в K' .

ML 50. Докажите, что если формула φ верна в алгебраически замкнутом поле в характеристике 0, то найдется p_0 , что для любого $p > p_0$ формула φ будет верна в алгебраически замкнутом поле с характеристикой p .

ML 51. Будет ли теория $\text{Th}(\mathbb{Z}, <, =)$ конечно аксиоматизируемой.

ML 52. Будет ли теория $\text{Th}(\mathbb{N}, <, =)$ конечно аксиоматизируемой.

ML 53. Докажите, что:

- в интерпретации $(\mathbb{Q}, =, <, +, \text{рациональные константы})$ допустима элиминация кванторов;
- интерпретации $(\mathbb{Q}, =, <, +, \text{рациональные константы})$ и $(\mathbb{R}, =, <, +, \text{рациональные константы})$ элементарно эквивалентны;
- если единичный квадрат разрезан на несколько меньших квадратов, то все они имеют рациональные стороны (подсказка: используйте предыдущие пункты и покажите единственность решения системы уравнений).

ML 22. Задача Поста состоит в следующем: есть доминошки n видов $\begin{bmatrix} s_i \\ t_i \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} s_n \\ t_n \end{bmatrix}$, s_i и t_i — конечные строки, есть неограниченный запас доминошек каждого вида, доминошки переворачивать нельзя. Требуется определить, можно ли составить несколько доминошек так, чтобы в верхней и нижней их половине читалась одна и та же строка, такие последовательности доминошек будем называть согласованными. Докажите, что задача Поста алгоритмически неразрешима.

ML 41. Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(\mathbb{Q}, =, S)$, где S — прибавление единицы? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация кванторов стала возможной.

ML 42. Пусть T — замкнутая формула в некоторой сигнатуре, и пусть существует интерпретация со сколь угодно большим носителем, в которой данная формула истинна. Докажите, что существует интерпретация с бесконечным носителем, в которой данная формула истинна.

ML 43. Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(\mathbb{Z}, =, <, +, 0, 1)$?

ML 44. Будет ли интерпретация $(\mathbb{Q}, =, <)$ элементарно эквивалентна:

- $(\mathbb{Q} + \mathbb{Q}, =, <)$;
- $(\mathbb{Q} + \mathbb{R}, =, <)$.

(Подсказка: попробуйте провести элиминацию кванторов).

ML 45. $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ — это две копии целых чисел, причем все числа из второй копии больше

чисел из первой. Докажите, что $(\mathbb{Z}, <, =)$ элементарно эквивалентна $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, <, =)$.

ML 47. Пусть T — теория (множество замкнутых формул) следующего языка: $\{<, R, B\}$, где R (red) и B (blue) унарные предикаты. T содержит все аксиомы плотного линейного порядка без первого и последнего элемента, а также:

- $\forall xy \exists zw (x < z < w < y \wedge R(z) \wedge B(w))$;
- $\forall x (R(x) \vee B(x))$;
- $\forall x (R(x) \leftrightarrow \neg B(x))$.

Докажите, что любые интерпретации данной теории на счетном множестве изоморфны.