DL 109. Дана система из n линейных уравнений. Докажите, что система несовместна тогда и только тогда, когда линейными комбинациями из этих уравнений можно получить $0 = 1$. (В решении нельзя без доказательства пользоваться теоремами линейной алгебры, если вы их еще не изучали в Академическом университете).

DL 110. Пусть платежная матрицы игры квадратная и кососимметрическая (т. е. $a_{i,j} = -a_{j,i}$). Покажите, что цена игры равняется нулю.

DL 111. Рассмотрим вещественную матрицу $m \times n$. Седловым элементом матрицы называется элемент, который является минимальным (или одним из минимальных) в своей строке и максимальным (или одним из максимальных) элементов своего столбца. Покажите, что
- а) если седловых элементов несколько, то они все равны;
- б) если в матрице есть седловой элемент, то он равен цене игры.

DL 112. Найдите цены игр и оптимальные стратегии для матричных игр, которые задаются такими матрицами:
- а) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
- б) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

DL 113. Алиса берет в кулак монету в рубль или два, если Боб отгадывает, то он получает монету, иначе он платит штраф в x рублей. При каком x никакой из игроков не сможет систематически выигрывать?

DL 75. Пусть функция CONN принимается на вход ребра графа и возвращает 1 тогда и только тогда, когда данный граф связен.
- а) Докажите, что глубина дерева решений функции CONN равна $\frac{n(n-1)}{2}$, где n — число вершин входного графа.
- б) Оцените размер дерева решений функции CONN.

DL 91. Пусть $\mathcal{F}$ — это семейство подмножеств $\{1, 2, \ldots, n\}$, а p_i — это доля элементов $\mathcal{F}$, которые содержат элемент i. Докажите, что $|\mathcal{F}| \le 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} H(p_i)}$.

DL 94. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, $I \subseteq [n]$ — произвольное множество. Докажите, что:
- а) для любых $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ события $[X_i \in A_i]$ являются независимыми;
- б) для любых функций $f_1, f_2, \ldots f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ случайные величины $f(X_i)$ являются независимыми;
- в) случайные величины $\{X_i\}_{i \in I}$ являются независимыми;
- г) для любых функций $f : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^{[n]\setminus I} \to \mathbb{R}$ случайные величины $f((X_i)_{i \in I})$ и $g((X_i)_{i \in [n]\setminus I})$ независимы.

DL 98. Пусть $\alpha(G)$ — размер максимального независимого множества в графе G (независимое множество — это такое множество вершин, что ребер между ними нет). В графе n вершин и $\frac{dn}{2}$ ребер. Докажите, что $\alpha(G) \ge \frac{n}{2d}$.

DL 100. Коды Уолша-Адамара.

а) Каждому $a \in \{0,1\}^n$ соответствует линейная функция $f_a : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, определяемая так: $f_a(x_1 x_2 \dots x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \bmod 2$. Кодом Уолша-Адамара строки $a \in \{0,1\}^n$ называется таблица значений функции f_a и обозначается $\mathtt{WH}(a)$, нетрудно понять, что длина строки $\mathtt{WH}(a)$ равняется 2^n. Проверьте, что для двух различных строк $a, b \in \{0,1\}^n$ их коды $\mathtt{WH}(a)$ и $\mathtt{WH}(b)$ отличаются ровно в половине позиций.

б) Предположим, что у нас есть оракульный доступ к строке Z (это значит, что можно делать запросы к строке Z, за один запрос можно узнать один бит строки Z), которая отличается от $\mathtt{WH}(a)$ не более, чем в доле $\frac{1}{4} - \epsilon$ позиций, где ϵ — это некоторая константа, причем строка $a \in \{0,1\}^n$ нам неизвестна. Придумайте вероятностный алгоритм, который для всех $x \in \{0,1\}^n$ вычислит $f_a(x)$ с вероятностью как минимум $\frac{9}{10}$, причем этот алгоритм может должен делать лишь константное число запросов к строке Z и работать полиномиальное от n время.