20 ноября 2017

Количество баллов на зачет: *7*

1. *(1.5 балла)* Вавилонская библиотека — это библиотека, содержащая все возможные конечные тексты на каком-то (скажем, русском) языке. Предположим, что каждый текст записан в книге, и каждая книга представляет из себя параллелепипед конкретных (но сколь угодно малых) размеров. Можно ли так подобрать размеры книг, чтобы вся библиотека поместилась в куб $1 \times 1 \times 1$? А если в библиотеку включить тексты бесконечной длины?

2. *(2.5 балла)* Можно ли на плоскость поместить более чем счетное количество непересекающихся

   (a) букв О (окружностей без внутренностей)?

   (b) букв Г (двух перпендикулярных отрезков с общим концом)?

   (c) букв Т (двух перпендикулярных отрезков, таких, что конец одного из них является серединой другого)?

3. *(1 балл)* Докажите, что множество точек строгого локального максимума любой функции действительного аргумента конечно или счётно.

4. *(2.5 балла)* Пусть f —– взаимно однозначное соответствие между A и некоторым подмножеством множества B, а g —– взаимно однозначное соотвествие между B и некоторым подмножеством множества A. Докажите, что можно так разбить множество A на непересекающиеся части A' и A'', а множество B —– на непересекающиеся части B' и B'', что f осуществляет взаимно однозначное соответствие между A' и B', а g —– между A'' и B''.

5. *(1.5 балла)* Докажите, что квадрат можно разбить на две части так, что из подобных им частей можно сложить круг. Формально: квадрат можно разбить на две части A' и A'', а круг —– на две части B' и B'', для которых A' подобно B', а A' подобно B''.

6. *(1.5 балла)* Приведите явную биекцию между точками квадрата и плоскости.

7. *(2 балла)* Пусть $\mathbf{A}$ — семейство множеств, такое, что для каждого $A \in \mathbf{A}$ найдется множество $B \in$ **a**, не эквивалентное никакому подмножеству A. Доказать, что объединение всех множеств из $\mathbf{A}$ не эквивалентно никакому подмножеству множества из $\mathbf{A}$

8. *(2 балла)* Будем говорить, что последовательность положительных чисел $b_1, b_2, \ldots$ растет быстрее, чем $a_1, a_2, \ldots$, если $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Пусть A — множество, элементами которого являются последовательности положительных чисел. Докажите, что если для любой положительной последовательности $a_1, a_2, \ldots$ существует последовательность из A, растущая быстрее ее, то A несчетно.