Курс: Функциональное программирование
Практика 1. Чистое лямбда-исчисление как язык программирования

Разминка

► Выполните подстановку

$$
\begin{array}{ll}
x\,y\,(\lambda\,z\,y.\,z\,x\,(w\,x)\,y) & [x := w\,(\lambda\,x.\,w\,x)] \\
x\,y\,(\lambda\,z\,y.\,z\,x\,(w\,x)\,y) & [y := w\,(\lambda\,x.\,w\,x)] \\
x\,y\,(\lambda\,z\,y.\,z\,x\,(w\,x)\,y) & [z := w\,(\lambda\,x.\,w\,x)] \\
x\,y\,(\lambda\,z\,y.\,z\,x\,(w\,x)\,y) & [x := w\,(\lambda\,x.\,y\,x)]
\end{array}
$$

Определите, возможно ли в получшемся терме выполнить β-преобразование.

► Уберите лишние скобки и при возможности выполните β-преобразование

$$((\lambda\,z.(z\,(y\,z)))\,(z\,x)\,z)$$

Булевы значения можно определить так:

$$
\begin{array}{lcl}
\texttt{tru} & \equiv & \lambda\,t\,f.\,t \\
\texttt{fls} & \equiv & \lambda\,t\,f.\,f
\end{array}
$$

Стандартные булевы операции кодируются так:

$$
\begin{array}{lcl}
\texttt{iif} & \equiv & \lambda\,b\,x\,y.\,b\,x\,y \\
\texttt{not} & \equiv & \lambda\,b.\,b\ \texttt{fls}\ \texttt{tru} \\
\texttt{and} & \equiv & \lambda\,x\,y.\,x\,y\ \texttt{fls} \\
\texttt{or} & \equiv & ???\quad \text{(упражнение)}
\end{array}
$$

► Проверьте, что ожидаемые свойства условного выражения выполняются:

$$
\begin{array}{lcl}
\texttt{iif}\ \texttt{tru}\ v\ w & = & v; \\
\texttt{iif}\ \texttt{fls}\ v\ w & = & w.
\end{array}
$$

► Проверьте, что ожидаемые свойства логического оператора «И» выполняются:

$$
\begin{array}{lcl}
\texttt{and}\ \texttt{tru}\ w & = & w; \\
\texttt{and}\ \texttt{fls}\ w & = & \texttt{fls}.
\end{array}
$$

► Попробуйте найти более «короткую» версию оператора «НЕ».
► Реализуйте оператор «ИЛИ».

Пару (двухэлементный кортеж) можно определить так:

$$\texttt{pair} \equiv \lambda\,x\,y\,f.\,f\,x\,y$$

Стандартные операции для пары (проекции):

$$\begin{array}{lcl} \texttt{fst} & \equiv & \lambda\, p.\, p\ \texttt{tru} \\ \texttt{snd} & \equiv & \lambda\, p.\, p\ \texttt{fls} \end{array}$$

► Проверьте, что ожидаемые свойства проекций выполняются:

$$\begin{array}{lcl} \texttt{fst}\ (\texttt{pair}\ a\ b) & = & a; \\ \texttt{snd}\ (\texttt{pair}\ a\ b) & = & b. \end{array}$$

Числа (нумералы Чёрча)

$$\begin{array}{lcl} 0 & \equiv & \lambda\, s\, z.\, z \\ 1 & \equiv & \lambda\, s\, z.\, s\, z \\ 2 & \equiv & \lambda\, s\, z.\, s\, (s\, z) \\ 3 & \equiv & \lambda\, s\, z.\, s\, (s\, (s\, z)) \\ 4 & \equiv & \lambda\, s\, z.\, s\, (s\, (s\, (s\, z))) \\ & \dots & \end{array}$$

Выражение $F^n(X)$, где $n \in \mathbb{N}$, а $F, X \in \Lambda$, определим индуктивно:

$$\begin{array}{rcl} F^0(X) & \equiv & X; \\ F^{n+1}(X) & \equiv & F(F^n(X)). \end{array}$$

Тогда n-ое число Чёрча :

$$\mathtt{n} \equiv \lambda\, s\, z.\, s^n(z).$$

Проверка числа на ноль ($0 \equiv \lambda\, s\, z.\, z$):

$$\texttt{iszro} \equiv \lambda\, n.\, n\ (\lambda\, x.\, \texttt{fls})\ \texttt{tru}$$

► Проверьте, что ожидаемые свойства `iszro` выполняются.
► Попробуйте найти более «короткую» версию `iszro`.

Функция следования для чисел Чёрча

$$\texttt{succ} \equiv \lambda n\, s\, z.\, s\, (n\, s\, z)$$

► Проверьте, что ожидаемые свойства `succ` выполняются.
► Попробуйте найти другое определение `succ`.

Функция сложения чисел Чёрча

$$\texttt{plus} \equiv \lambda m\, n\, s\, z.\, m\, s\, (n\, s\, z)$$

► Проверьте, что ожидаемые свойства `plus` выполняются.
► Попробуйте найти определение `plus` с использованием `succ` .

Функция умножения чисел Чёрча

$$
\begin{aligned}
\texttt{mult1} &\equiv \lambda m\, n.\, m\,(\texttt{plus}\ n)\ \texttt{0} \\
\texttt{mult2} &\equiv \lambda m\, n\, s\, z.\, m\,(n\, s)\, z
\end{aligned}
$$

▶ Проверьте, что ожидаемые свойства умножения выполняются.
▶ Можно ли `mult2` записать короче?

Функция предшествования для чисел Чёрча.
Вспомогательные функции

$$
\begin{aligned}
\texttt{zp} &\equiv \texttt{pair 0 0} \\
\texttt{sp} &\equiv \lambda p.\, \texttt{pair}\ (\texttt{snd}\ p)\ (\texttt{succ}\ (\texttt{snd}\ p))
\end{aligned}
$$

Вторая работает так

$$\texttt{sp}\ (\texttt{pair i j}) = \texttt{pair j j} + 1$$

$$
\begin{aligned}
\texttt{sp}^0\ (\texttt{zp}) &= \texttt{pair 0 0} \\
\texttt{sp}^m\ (\texttt{zp}) &= \texttt{pair m} - 1\ \texttt{m}
\end{aligned}
$$

(здесь $m > 0$). Тогда функция предшествования:

$$\texttt{pred} = \lambda m.\, \texttt{fst}\ (m\ \texttt{sp zp})$$

▶ Какая у неё временная сложность?
▶ Что нужно поменять, чтобы вышел факториал?

Числа Чёрча: примитивная рекурсия.
Обобщим предыдущую схему

$$
\begin{aligned}
\texttt{xz} &\equiv \lambda x.\, \texttt{pair}\ x\ \texttt{0} \\
\texttt{fs} &\equiv \lambda f\, p.\, \texttt{pair}\ (f\ (\texttt{fst}\ p)\ (\texttt{snd}\ p))\ (\texttt{succ}\ (\texttt{snd}\ p)) \\
\texttt{rec} &\equiv \lambda m\, f\, x.\, \texttt{fst}\ (m\ (\texttt{fs}\ f)\ (\texttt{xz}\ x))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \langle & x, \arrow[dl] & 0\ \rangle \arrow[dl] \arrow[d, "\texttt{succ}"] \\
 & & \langle f & x \arrow[dl] & 0, & 1\ \rangle \arrow[dl] \arrow[d, "\texttt{succ}"] \\
 & \langle f\ (f & x \arrow[dl] & 0) & 1, & 2\ \rangle \arrow[dl] \arrow[d, "\texttt{succ}"] \\
\langle f\ (f\ (f & x & 0) & 1) & 2, & 3\ \rangle
\end{tikzcd}
$$

В частности,

$$\texttt{pred} \ = \ \lambda m.\, \texttt{rec}\ m\ (\lambda x\, y.\, y)\ \texttt{0}$$

▶ Реализуйте факториал через комбинатор примитивной рекурсии `rec`.

Конструкторы **списков** можно определить так:

$$\begin{array}{lcl} \texttt{nil} & \equiv & \lambda c\, n.\, n \\ \texttt{cons} & \equiv & \lambda e\, l\, c\, n.\, c\, e\, (l\, c\, n) \end{array}$$

Например,

$$[\,] = \texttt{nil} \ = \ \lambda c\, n.\, n$$

$$[5,3,2] \ = \ \texttt{cons}\ 5\ (\texttt{cons}\ 3\ (\texttt{cons}\ 2\ \texttt{nil})) \ = \ \lambda c\, n.\, c\ 5\ (c\ 3\ (c\ 2\ n))$$

Функция, определяющая пуст ли список

$$\texttt{empty} \ \equiv \ \lambda l.\, l\ (\lambda h\, t.\, \texttt{fls})\ \texttt{tru}$$

▶ Проверьте правильность работы `empty`.
▶ Постройте функцию `head`, возвращающую голову списка, например

$$\texttt{head}\ [5,3,2] \ = \ 5$$

▶ * Постройте функцию `tail`, возвращающую хвост списка, например

$$\texttt{tail}\ [5,3,2] \ = \ [3,2]$$

Домашнее задание

▶ Выполните подстановку

$$\begin{array}{ll} \lambda\, y\, z.\, x\, y\, w, (z\, x) & [x := \lambda\, y.\, y\, w] \\ \lambda\, x\, y.\, x\, y\, (\lambda\, x.\, x\, y)\, x & [x := \lambda\, z.\, z] \\ x\, y\, (\lambda\, x\, z.\, x\, y\, z)\, y & [y := x\, z] \end{array}$$

Определите, возможно ли в получшемся терме выполнить β-преобразование.

▶ Уберите лишние скобки и при возможности выполните β-преобразование

$$\begin{array}{l} (x\, (\lambda\, x.((x\, y)\, x))\, y) \\ ((\lambda\, p.(\lambda\, q.((q\, (p\, r))\, s)))\, ((q\, (p\, r))\, s)) \end{array}$$

► Покажите, что

$$\mathbf{S}\,\mathbf{K}\,\mathbf{K} = \mathbf{I}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{S}\,(\mathbf{K}\,\mathbf{S})\,\mathbf{K}$$

► Попробуйте придумать функцию возведения в степень для чисел Чёрча.

► Реализуйте алгоритм подстановки на каком-либо языке программирования.

► Используя **Y**-комбинатор, сконструируйте
– «пожиратель», то есть такой терм F, который для любого M обеспечивает $\mathsf{F}\,\mathsf{M} = \mathsf{F}$.
– терм F таким образом, чтобы для любого M выполнялось $\mathsf{F}\,\mathsf{M} = \mathsf{M}\,\mathsf{F}$.
– терм F таким образом, чтобы для любых термов M и N выполнялось $\mathsf{F}\,\mathsf{M}\,\mathsf{N} = \mathsf{N}\,\mathsf{F}\,(\mathsf{N}\,\mathsf{M}\,\mathsf{F})$.