

Совершенные паросочетания в произвольном графе. Теорема Татта, формула Татта-Бержа

Домашнее задание №11

24 ноября 2017 г.

Обязательная часть

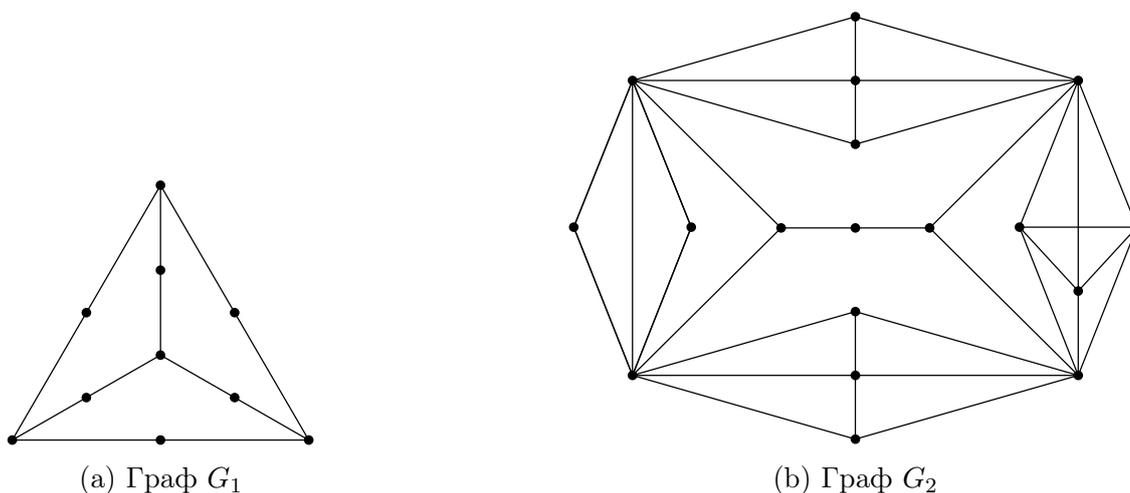


Рис. 1

1. (1.5 балла). Найти максимальные паросочетания в графах G_1 и G_2 , изображенных на рис.1, и доказать с помощью формулы Татта-Бержа, что найденные паросочетания действительно являются максимальными.

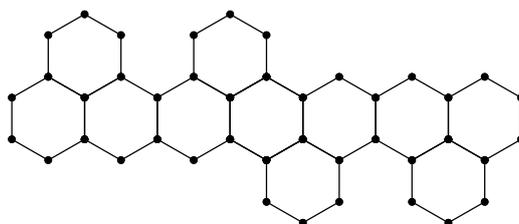


Рис. 2: Граф G

2. (1.5 балла). Найти максимальное паросочетание в графе G , изображенном на рис.2, и доказать с помощью формулы Татта-Бержа, что найденное паросочетание действительно является максимальными.

3. (1.5 балла). Доказать, что в дереве T существует совершенное паросочетание M тогда и только тогда, когда для любой вершины $x \in V(T)$ справедливо равенство $c_{\text{odd}}(T - x) = 1$.
4. (1.5 балла). Чему равно минимальное количество вершин в кубическом графе, не имеющем совершенного паросочетания?
5. (2 балла). Для любого $k > 1$ предъявить k -регулярный граф, в котором совершенное паросочетание отсутствует.
6. (1.5 балла). Назовем граф G фактор-критическим, если в нем нет совершенного паросочетания, но при удалении любой вершины оно появляется. Иными словами, для любой вершины x в графе найдется паросочетание, покрывающее все вершины графа, кроме выбранной вершины x . Доказать, что $c_{\text{odd}}(G - S) - |S| \leq 1$ для любого непустого подмножества S вершин графа G .
7. (1 балл). Доказать, что никакой двудольный граф $G[X, Y]$ фактор-критическим быть не может.