Математическая логика

Практика 5, 6

05/04/2018

Интуиционистское исчисление высказываний. Шкалы Крипке

Напомним, что шкалой или моделью Крипке называется двойка $(\mathcal{W}, \geqslant)$, в которой $\mathcal{W}$ – это множество миров, а $\geqslant$ – отношение частичного порядка. Кроме этого, есть указание истинности (некоторых) пропозициональных переменных в каждом мире, которое обозначается как $w \Vdash p$. Истинность формул в мире w определяется индуктивным образом:

1. Если p – пропозициональная переменная и $w \Vdash p$, то $\forall u \geqslant w$ верно $u \Vdash p$
2. Если $w \Vdash A$ и $w \Vdash B$, то $w \Vdash A \wedge B$
3. Если $w \Vdash A$ или $w \Vdash B$, то $w \Vdash A \vee B$
4. Если $\forall u \geqslant w$, в котором $u \Vdash A$, верно так же $u \Vdash B$
5. Если $\forall u \geqslant w$ $A \nVdash u$, то $w \Vdash \neg A$

Утверждается, что если формула выводима в интуиционистском исчислении высказываний, то она истинна во всех мирах любой шкалы Крипке. Это значит, что для того, что бы показать, что некоторая формула невыводима, достаточно предъявить для нее контрмодель Крипке. Например для закона исключенного третьего на лекции была построена модель:

$$\begin{tikzcd} w_2 \Vdash p \\ w_1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Задания:

- Покажите, что для доказательства невыводимости этой же формулы можно использовать следующую шкалу:

$$\begin{tikzcd} w_2 \Vdash p & & w_3 \\ & w_1 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

- В каких мирах модели Крипке:

$$\begin{tikzcd} & & & w_4 \Vdash p \\ w_2 & & w_3 \arrow[ur] & \\ & w_1 \arrow[ul] \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

  верны формулы $\neg p$, $\neg\neg p$?

- Покажите, что для формулы $\neg\neg p \to p$ можно взять следующую шкалу Крипке в качестве контрпримера:

$$\begin{tikzcd} w_2 \Vdash p \\ w_1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

- Приведите указание истинности переменных в контрмодели Крипке для закона $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$

$$\begin{tikzcd} w_2 \\ w_1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

- Пусть дана шкала Крипке:

$$\begin{tikzcd} w_2 & & w_3 \\ & w_1 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

  Приведите указание истинности переменных, так что бы её можно было использовать для контрпримера к следующим формулам:

1. $\neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q$ – закон Де Моргана
2. $(p \vee q \to p) \vee (p \vee q \to q)$
3. $(p \to q \vee r) \to (p \to q) \vee (p \to r)$

Логика предикатов

Разминка:

- Определите, из чего состоит сигнатура и какие переменные являются связанными, а какие свободными в формулах:

  1. $\exists x \forall z \neg P(x, z) \wedge Q(y, z) \to \exists y \neg R(x, y)$
  2. $\exists x \forall x P(F(x), x) \vee Q(x, F(x))$

Задания:

1. Сигнатура теории упорядоченных множеств состоит из двух предикатных символов $=$ и $\leqslant$. Запишите аксиомы нестрого порядка (рефлексивность, транзитивность, антисимметричность). Выразите в данной сигнатуре: свойство не иметь наибольшего элемента, свойство плотности (отсутствие соседних элементов).

2. Для каждого из перечисленных выше свойств приведите интерпретации, в которых данное свойство (а) выполняется, (б) не выполняется. (Аксиомы при этом должны выполняться, то есть интерпретация должна быть моделью!)

Домашнее задание

1. (1б.) Покажите, что для контрмодели Крипке для формулы $(\neg p \to q \vee r) \to (\neg p \to q) \vee (\neg p \to r)$ можно взять шкалу:

$$\begin{tikzcd} w_2 & w_3 & w_4 \\ & w_1 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

   (истинные переменные в мирах задайте самостоятельно).

2. (1б.) Постройте контрмодель Крипке для формулы $(p \to q) \to \neg p \vee q$

3. (2б.) Постройте контрмодель Крипке для закона Пирса $((p \to q) \to p) \to p$

4. В стандартной интерпретации языка элементарной арифметики выразите следующие свойства:

   (a) (1б.) q есть частное от деления a на b;

   (b) (1б.) r есть остаток от деления a на b;

   (c) (1б.) s есть НОД a и b;

   (d) (1б.) t есть НОК a и b;

   (e) (1б.) a и b взаимно просты;

   (f) (1б.) u является степенью тройки.

   Для сокращения записи пользуйтесь полученными ранее предикатами, введя для них вспомогательные символы.