

Композиция экспоненциальных производящих функций. Формула Фаа ди Бруно.

19 мая 2017 г.

1. Подсчитать количество способов разбить n -элементное множество на блоки размерами большими или равными двум. Выразить ответ в терминах чисел Белла.
2. Доказать для чисел Белла так называемую формулу Добинского

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

3. В комнате находятся n детей. Эти дети разбиваются на группы. В каждой группе одного ребенка ставят в центр круга, а вокруг него из оставшихся в группе детей образуют хоровод. При этом хоровод может состоять как из нескольких детей, так и из одного ребенка, соединившего руки. Записать экспоненциальную производящую функцию $H(z)$, описывающую количество способов совершить эти комбинаторные действия.
4. В колоде лежит n карт. Подсчитать количество способов разбить эти карты на группы чётного размера, в каждой группе образовать из карт упорядоченную стопку, а затем разложить полученные стопки в ряд.
5. Сколькими способами можно разбить группу из тридцати студентов на пары и тройки для совместной работы над курсовым проектом?
6. Предположим теперь, что мы не только разбиваем тридцать студентов на пары и тройки, но ещё и выделяем в каждом курсовом

проекте несколько частей так, что в парах студенты могут распределить эти части между собой для работы над ними a_2 способами, а в тройках — a_3 способами. Подсчитать количество способов совершить данные комбинаторные действия, выразив ответ через полиномы Белла $B_{n,k}$.

7. Выразить через $p(n)$, $p(n - 1)$, $p(n - 2)$ и $p(n - 3)$ количество разбиений, в которых равны три наибольшие части.
8. С использованием диаграмм Ферре показать, что количество разбиений числа n ровно на k частей равно количеству разбиений числа $n + k(k - 1)/2$ ровно на k неравных частей.