Основные определения теории графов. Пути, циклы.

Невозрастающая последовательность неотрицательных чисел

$$\mathbf{d} := (d_1, d_2, \ldots, d_n) \; : \qquad d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0$$

называется *графовой,* если она является последовательностью степеней вершин некоторого *простого* графа G.

1. Рассмотрим произвольную смежную пару вершин $\{x, y\}$ в простом графе G на n вершинах. Доказать, что ребро $e = \{x, y\}$ принадлежит по меньшей мере $\deg(x) + \deg(y) - n$ треугольникам в графе G (сведение к раскладке предметов по ящикам).

2. Пусть G есть простой граф, построенный на 9 вершинах. Предположим, что сумма степеней вершин графа G больше или равна 27. Правда ли, что в таком графе обязательно существует вершина, степень которой больше или равна четырем ?

3. Рассмотрим невозрастающую последовательность неотрицательных целых чисел
$$d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0.$$
Доказать, что такая последовательность является степенной последовательностью некоторого графа G без петель тогда и только тогда, когда сумма всех этих чисел есть четное число и выполняется неравенство
$$d_1 \leq d_2 + d_3 + \ldots + d_n$$

4. Любой элемент $a_{i,j}$ матрицы M_a смежности графа G можно трактовать как количество путей длины 1 в графе G из вершины i в вершину j. Чему равны с этой точки зрения элементы матрицы M_a^2? Можно ли обобщить данный результат на случай произвольной степени $k > 1$ матрицы M_a ?

5. Орграф D называется сбалансированным, если для любой вершины $x \in V(D)$ выполняется неравенство
$$|outdeg(x) - indeg(x)| \leq 1.$$
Доказать, что из любого неориентированного графа G можно получить направленный сбалансированный орграф D (первая теорема для орграфа).

6. Доказать, что в простом графе с $\Delta = n - 2$ и диаметром 2 количество ребер $m \geq 2n - 4$ (определения).

7. Пусть G есть простой граф, диаметр которого $diam(G) \geq 3$. Доказать, что его дополнение $\bar{G}$ имеет диаметр $diam(\bar{G}) \leq 3$ (определения).

8. Какое максимальное количество ребер может быть в простом слабо связном ориентированном графе на n вершинах, не являющемся сильно связным (определения, несвязный)?

9. Доказать, что простой граф G, построенный на 10 вершинах и имеющий 28 ребер, содержит цикл длины 4.

10. Пусть G есть граф с обхватом $g(G) \geq 5$ и минимальной степенью вершины $\delta \geq k$. Доказать, что в таком графе по меньшей мере k^2+1 вершин. Для случая $k = 2$ предъявить граф, имеющий в точности $k^2 + 1$ (определения).

11. Пусть G есть произвольный простой несвязный граф. Доказать, что его дополнение $\bar{G}$ всегда является связным графом. Чему равен диаметр графа $\bar{G}$?

12. Доказать, что в простом графе с обхватом, большим или равным $2k$, диаметр больше или равен k.