

Математическая логика и теория вычислимости

Лекция 13. Модели вычислений

Денис Николаевич Москвин

Кафедра математических и информационных технологий
Санкт-Петербургского академического университета

9.12.2014

- 1 Машина Тьюринга
- 2 Прimitивно рекурсивные функции
- 3 Прimitивно рекурсивные функции и машины Тьюринга

- 1 Машина Тьюринга
- 2 Прimitивно рекурсивные функции
- 3 Прimitивно рекурсивные функции и машины Тьюринга

- Машина Тьюринга (Alan Turing, 1936) состоит из
 - 1 бесконечной в обе стороны *ленты*, разделенной на *ячейки*;
 - 2 *управляющего устройства* с конечным числом *состояний*.
- Ячейки ленты заполнены символами некоторого алфавита Σ . Имеется выделенный *пустой* символ, которыми заполнены все ячейки, кроме конечного числа.
- Управляющее устройство
 - 1 всегда позиционировано на какой-то ячейке ленты;
 - 2 может двигаться вдоль ленты в обе стороны;
 - 3 умеет считывать и записывать символ в текущую ячейку.
- Среди множества состояний $q_i \in Q$ устройства выделяют
 - 1 начальное состояние q_0 ;
 - 2 подмножество *заключительных* состояний $F \subset Q$, перейдя в которые машина останавливается.
- Имеются *правила перехода* (таблица переходов), описывающие поведение машины в зависимости от текущего состояния и символа в ячейке ленты.

Работа машины Тьюринга

- Таблица переходов представляет собой частичную (partial) функцию и задает *программу* машины Тьюринга

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \Sigma \times \{L, R, N\}$$

- Обычно инструкции (элементы таблицы переходов) записывают так:

$$q_i a_j \rightarrow q_i' a_j' d_k$$

- Работа машины Тьюринга:
 - 1 входное слово записывается на пустой ленте;
 - 2 управляющее устройство позиционируется в его начале;
 - 3 выполняются переходы в соответствии с таблицей переходов;
 - 4 если машина остановилась, результатом считается слово, считываемое направо от текущей позиции управляющего устройства.
- Каждая машина Тьюринга задает частичную функцию на словах алфавита Σ . Такие функции называют *вычислимыми по Тьюрингу*.

Машина Тьюринга: пример

- Реализуйте машину Тьюринга, складывающую два последовательно записанных на ленте числа в $(S, 0)$ -кодировке, например

□SSSS0SSSO□

Машина Тьюринга: пример

- Реализуйте машину Тьюринга, складывающую два последовательно записанных на ленте числа в $(S, 0)$ -кодировке, например

$\sqcup SSSS0SSSO \sqcup$

- Таблица переходов:

$q_0 S \rightarrow q_0 SR$

$q_0 0 \rightarrow q_1 SL$

$q_1 S \rightarrow q_1 SL$

$q_1 \sqcup \rightarrow q_1 \sqcup R$

$q_2 S \rightarrow q_f \sqcup R$

- Машина Тьюринга с несколькими лентами — не меняет класса вычислимых функций, но может улучшить асимптотику.
- На самом деле двухленточной достаточно, дальше выигрыш не больше логарифмического.
- Можно использовать полубесконечную ленту. Это тоже не меняет класса вычислимых функций.
- Недетерминированные машины Тьюринга — для некоторых пар (состояние, текущий символ на ленте) может быть более одного правила перехода.

Универсальная машина Тьюринга

- Универсальная машина Тьюринга — это машина Тьюринга, которая моделирует поведение произвольной машины Тьюринга на произвольном входе.
- Удобно работать с двумя лентами: на одной кодируем таблицу переходов моделируемой машины, на другой — входные данные для закодированного алгоритма.
- Явное построение такой машины — дело не очень сложное, но содержит много технических деталей.
- Первое конструктивное доказательство ее существования дано Тьюрингом (Alan Turing, 1947)
- Фактически универсальная машина Тьюринга моделирует поведение универсальной функции $U(n, x)$.

- **Тезис Тьюринга.** Всякая вычислимая функция вычислима на машине Тьюринга.
- Это не строгое математическое утверждение, а эмпирическое наблюдение, поскольку нет точного определения «вычислимости вообще».
- Рассматривалось много способов дать «широкое» определение понятия вычислимости:
 - машины Тьюринга и Поста;
 - нормальные алгоритмы Маркова;
 - лямбда-исчисление Чёрча;
 - частично рекурсивные функции.
- Тем не менее все эти попытки приводят к одному и тому же классу вычислимых функций.

- 1 Машина Тьюринга
- 2 Прimitивно рекурсивные функции
- 3 Прimitивно рекурсивные функции и машины Тьюринга

Примитивно рекурсивные функции

- Примитивно рекурсивные функции строят индуктивно из 3 базисных функций с помощью 2 операций.
- Базисные функции:
 - константа 0;
 - функция следования («саксессор») $s(x) = x + 1$;
 - семейство функций проекции: для каждого k их k штук:
 $\pi_k^i(x_1, \dots, x_k) = x_i$.
- Операции:
 - если имеется функция f арности k и семейство функций g_1, \dots, g_k , каждая арности n , то операция *подстановки* задает функцию h арности n

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

- операция *примитивной рекурсии* (определим чуть позже).
- Используя саксессор можно определить константы $1 = s(0)$, $2 = s(1) = s(s(0))$ и т.д.

- Проекции позволяют «управлять» арностью:

$$\begin{aligned}x &= \pi_1^1(x) \\x &= \pi_2^1(x, y) \\x &= \pi_3^2(z, x, y) \\g(x) &= g(\pi_2^1(x, y))\end{aligned}$$

- **Пример.** Покажите, что функция примитивно рекурсивна:

$$t(x, y) = f(g(x), x, h(y, x, x))$$

- Проекции позволяют «управлять» арностью:

$$\begin{aligned}x &= \pi_1^1(x) \\x &= \pi_2^1(x, y) \\x &= \pi_3^2(z, x, y) \\g(x) &= g(\pi_2^1(x, y))\end{aligned}$$

- **Пример.** Покажите, что функция примитивно рекурсивна:

$$t(x, y) = f(g(x), x, h(y, x, x))$$

- Воспользуемся проекциями

$$t(x, y) = f(g(\pi_2^1(x, y)), \pi_2^1(x, y), h(\pi_2^2(x, y), \pi_2^1(x, y), \pi_2^1(x, y)))$$

Операция примитивной рекурсии

- Если имеется функция f арности k и функция g арности $k + 2$, то операция *примитивной рекурсии* задает функцию арности $k + 1$

$$h(x_1, \dots, x_k, 0) = f(x_1, \dots, x_k)$$

$$h(x_1, \dots, x_k, s(y)) = g(x_1, \dots, x_k, y, h(x_1, \dots, x_k, y))$$

- **Утверждение.** Сложение примитивно рекурсивно.

$$\text{sum}(x, 0) = x$$

$$\text{sum}(x, s(y)) = s(\text{sum}(x, y))$$

Операция примитивной рекурсии

- Если имеется функция f аности k и функция g аности $k + 2$, то операция *примитивной рекурсии* задает функцию аности $k + 1$

$$h(x_1, \dots, x_k, 0) = f(x_1, \dots, x_k)$$

$$h(x_1, \dots, x_k, s(y)) = g(x_1, \dots, x_k, y, h(x_1, \dots, x_k, y))$$

- **Утверждение.** Сложение примитивно рекурсивно.

$$\text{sum}(x, 0) = x$$

$$\text{sum}(x, s(y)) = s(\text{sum}(x, y))$$

- Каковы здесь функции f и g из определения операции примитивной рекурсии?

Операция примитивной рекурсии

- Если имеется функция f аности k и функция g аности $k + 2$, то операция *примитивной рекурсии* задает функцию аности $k + 1$

$$h(x_1, \dots, x_k, 0) = f(x_1, \dots, x_k)$$

$$h(x_1, \dots, x_k, s(y)) = g(x_1, \dots, x_k, y, h(x_1, \dots, x_k, y))$$

- **Утверждение.** Сложение примитивно рекурсивно.

$$\text{sum}(x, 0) = x$$

$$\text{sum}(x, s(y)) = s(\text{sum}(x, y))$$

- Каковы здесь функции f и g из определения операции примитивной рекурсии?

$$f(x) = \pi_1^1(x), \quad g(x, y, z) = s(z) = s(\pi_3^3(x, y, z)).$$

Примеры примитивно рекурсивных функций

- **Утверждение.** Умножение примитивно рекурсивно.

Примеры примитивно рекурсивных функций

- **Утверждение.** Умножение примитивно рекурсивно.

$$\text{prod}(x, 0) = 0$$

$$\text{prod}(x, s(y)) = \text{sum}(\text{prod}(x, y), x)$$

Примеры примитивно рекурсивных функций

- **Утверждение.** Умножение примитивно рекурсивно.

$$\begin{aligned}\text{prod}(x, 0) &= 0 \\ \text{prod}(x, s(y)) &= \text{sum}(\text{prod}(x, y), x)\end{aligned}$$

- Ниже мы будем использовать умножение и сложение в стандартной инфиксной форме.
- **Утверждение.** Усеченное вычитание примитивно рекурсивно.

Примеры примитивно рекурсивных функций

- **Утверждение.** Умножение примитивно рекурсивно.

$$\begin{aligned}\text{prod}(x, 0) &= 0 \\ \text{prod}(x, s(y)) &= \text{sum}(\text{prod}(x, y), x)\end{aligned}$$

- Ниже мы будем использовать умножение и сложение в стандартной инфиксной форме.
- **Утверждение.** Усеченное вычитание примитивно рекурсивно.
- Определим сначала «предессор», то есть функцию, которая вычитает 1.

$$\begin{aligned}\text{pred}(0) &= 0 \\ \text{pred}(s(y)) &= y\end{aligned}$$

Примеры примитивно рекурсивных функций

- **Утверждение.** Умножение примитивно рекурсивно.

$$\begin{aligned}\text{prod}(x, 0) &= 0 \\ \text{prod}(x, s(y)) &= \text{sum}(\text{prod}(x, y), x)\end{aligned}$$

- Ниже мы будем использовать умножение и сложение в стандартной инфиксной форме.
- **Утверждение.** Усеченное вычитание примитивно рекурсивно.
- Определим сначала «предессор», то есть функцию, которая вычитает 1.

$$\begin{aligned}\text{pred}(0) &= 0 \\ \text{pred}(s(y)) &= y\end{aligned}$$

- Теперь имеем для усеченного вычитания

$$\begin{aligned}x \dot{-} 0 &= x \\ x \dot{-} s(y) &= \text{pred}(x \dot{-} y)\end{aligned}$$

Примитивно рекурсивные множества

- Множество называют *примитивно рекурсивным*, если его характеристическая функция примитивно рекурсивна.
- Множество называют *примитивно рекурсивным*, если оно является множеством нулей примитивно рекурсивной функции.
- Оба эти определения эквивалентны, если $a(x)$ — характеристическая функция A , то $1 - a(x)$ обращается в ноль в точности на элементах множества. Обратно аналогично.
- **Утверждение.** Пересечение, объединение и дополнение примитивно рекурсивных множеств примитивно рекурсивны.

Примитивно рекурсивные множества

- Множество называют *примитивно рекурсивным*, если его характеристическая функция примитивно рекурсивна.
- Множество называют *примитивно рекурсивным*, если оно является множеством нулей примитивно рекурсивной функции.
- Оба эти определения эквивалентны, если $a(x)$ — характеристическая функция A , то $1 - a(x)$ обращается в ноль в точности на элементах множества. Обратно аналогично.
- **Утверждение.** Пересечение, объединение и дополнение примитивно рекурсивных множеств примитивно рекурсивны.

$$A \cap B$$

Примитивно рекурсивные множества

- Множество называют *примитивно рекурсивным*, если его характеристическая функция примитивно рекурсивна.
- Множество называют *примитивно рекурсивным*, если оно является множеством нулей примитивно рекурсивной функции.
- Оба эти определения эквивалентны, если $a(x)$ — характеристическая функция A , то $1 - a(x)$ обращается в ноль в точности на элементах множества. Обратно аналогично.
- **Утверждение.** Пересечение, объединение и дополнение примитивно рекурсивных множеств примитивно рекурсивны.

$$\begin{array}{ll} A \cap B & a(x)b(x) \\ \mathbb{N} \setminus A & \end{array}$$

Примитивно рекурсивные множества

- Множество называют *примитивно рекурсивным*, если его характеристическая функция примитивно рекурсивна.
- Множество называют *примитивно рекурсивным*, если оно является множеством нулей примитивно рекурсивной функции.
- Оба эти определения эквивалентны, если $a(x)$ — характеристическая функция A , то $1 \div a(x)$ обращается в ноль в точности на элементах множества. Обратно аналогично.
- **Утверждение.** Пересечение, объединение и дополнение примитивно рекурсивных множеств примитивно рекурсивны.

$$\begin{array}{ll} A \cap B & a(x)b(x) \\ \mathbb{N} \setminus A & 1 \div a(x) \\ A \cup B & \end{array}$$

Примитивно рекурсивные множества

- Множество называют *примитивно рекурсивным*, если его характеристическая функция примитивно рекурсивна.
- Множество называют *примитивно рекурсивным*, если оно является множеством нулей примитивно рекурсивной функции.
- Оба эти определения эквивалентны, если $a(x)$ — характеристическая функция A , то $1 \div a(x)$ обращается в ноль в точности на элементах множества. Обратно аналогично.
- **Утверждение.** Пересечение, объединение и дополнение примитивно рекурсивных множеств примитивно рекурсивны.

$$\begin{array}{ll} A \cap B & a(x)b(x) \\ \mathbb{N} \setminus A & 1 \div a(x) \\ A \cup B & 1 \div (1 \div a(x))(1 \div b(x)) \end{array}$$

Примитивно рекурсивные предикаты

- Принадлежность множеству можно интерпретировать как предикат, поэтому можем говорить о *примитивно рекурсивных предикатах*.
- Например, предикаты равенства $x = y$ и неравенства $x \neq y$ примитивно рекурсивны

$$x = y \quad =$$

Примитивно рекурсивные предикаты

- Принадлежность множеству можно интерпретировать как предикат, поэтому можем говорить о *примитивно рекурсивных предикатах*.
- Например, предикаты равенства $x = y$ и неравенства $x \neq y$ примитивно рекурсивны

$$x = y = 1 \dot{-} (x \dot{-} y) \dot{-} (y \dot{-} x)$$

$$x \neq y =$$

Примитивно рекурсивные предикаты

- Принадлежность множеству можно интерпретировать как предикат, поэтому можем говорить о *примитивно рекурсивных предикатах*.
- Например, предикаты равенства $x = y$ и неравенства $x \neq y$ примитивно рекурсивны

$$x = y = 1 \dot{-} (x \dot{-} y) \dot{-} (y \dot{-} x)$$

$$x \neq y = 1 \dot{-} (x = y)$$

- Условный оператор, то есть функция

$$f(x) = \text{if } P(x) \text{ then } g(x) \text{ else } h(x)$$

примитивно рекурсивен, если примитивно рекурсивны предикат P и функции f и g :

$$f(x) =$$

Примитивно рекурсивные предикаты

- Принадлежность множеству можно интерпретировать как предикат, поэтому можем говорить о *примитивно рекурсивных предикатах*.
- Например, предикаты равенства $x = y$ и неравенства $x \neq y$ примитивно рекурсивны

$$x = y = 1 \dot{-} (x \dot{-} y) \dot{-} (y \dot{-} x)$$

$$x \neq y = 1 \dot{-} (x = y)$$

- Условный оператор, то есть функция

$$f(x) = \text{if } P(x) \text{ then } g(x) \text{ else } h(x)$$

примитивно рекурсивен, если примитивно рекурсивны предикат P и функции f и g :

$$f(x) = P(x)g(x) + (1 \dot{-} P(x))h(x)$$

- Также примитивно рекурсивны факториал, функции mod и div , предикат «число n простое» (самостоятельно).

Примитивно рекурсивные кванторы

- Ограниченные кванторы, примененные к примитивно рекурсивным предикатам дают примитивно рекурсивные предикаты:

$$S(x, z) = \forall y \leq z. R(x, y)$$

$$T(x, z) = \exists y \leq z. R(x, y)$$

- Действительно,

$$S(x, z) = \prod_{y=0}^z R(x, y),$$

а произведение можно задать рекурсивно

$$\prod_{y=0}^0 f(x, y) = f(x, 0),$$

$$\prod_{y=0}^{s(t)} f(x, y) = f(x, s(t)) \cdot \prod_{y=0}^t f(x, y).$$

- Пусть график функции $f(x)$ примитивно рекурсивен, а ее значения ограничены сверху примитивно рекурсивной $g(x)$. Тогда f примитивно рекурсивна.

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{N}\}$$

- Действительно, рассмотрим характеристическую функцию графика $r(x, y)$, тогда

$$f(x) = \sum_{y=0}^{\infty} r(x, y)y = \sum_{y=0}^{g(x)} r(x, y)y$$

А конечная сумма примитивно рекурсивна (аналогично произведению с предыдущего слайда).

- Введем для предиката $P(x)$ *ограниченный оператор минимизации* $\mu x < z. P(x)$. Он возвращает наименьший x строго меньше z , для которого этот предикат выполняется, или z , если такого x нет.
- Пусть функция $g(x)$ и предикат $P(x, y)$ примитивно рекурсивны. Тогда примитивно рекурсивна функция

$$f(x) = \mu y < g(x). P(x, y)$$

- Действительно, график $f(x)$ легко описать ограниченными кванторами

$$\begin{aligned} P(x, y) = 1 & \wedge \forall z < y P(x, z) = 0 & \vee \\ y = g(x) & \wedge \forall z < y P(x, z) = 0 \end{aligned}$$

Примитивно рекурсивная нумерация пар

- Хотим по паре $\langle x, y \rangle$ примитивно рекурсивно задавать ее номер $[x, y]$ и, наоборот, по номеру $[x, y]$ находить значения элементов пары $x = p_1([x, y])$, $y = p_2([x, y])$.

Примитивно рекурсивная нумерация пар

- Хотим по паре $\langle x, y \rangle$ примитивно рекурсивно задавать ее номер $[x, y]$ и, наоборот, по номеру $[x, y]$ находить значения элементов пары $x = p_1([x, y])$, $y = p_2([x, y])$.
- Есть много подходящих способов нумерации:

$$[x, y] = (2x + 1)2^y - 1$$

$$[x, y] = 2^x 3^y$$

...

- Почему $p_1(n)$ и $p_2(n)$ будут примитивно рекурсивны?

Примитивно рекурсивная нумерация пар

- Хотим по паре $\langle x, y \rangle$ примитивно рекурсивно задавать ее номер $[x, y]$ и, наоборот, по номеру $[x, y]$ находить значения элементов пары $x = p_1([x, y])$, $y = p_2([x, y])$.
- Есть много подходящих способов нумерации:

$$[x, y] = (2x + 1)2^y - 1$$

$$[x, y] = 2^x 3^y$$

...

- Почему $p_1(n)$ и $p_2(n)$ будут примитивно рекурсивны?

$$p_1(n) = \mu x \leq n. \exists y \leq n. [x, y] = n$$

$$p_2(n) = \mu y \leq n. \exists x \leq n. [x, y] = n$$

- Пусть унарные функции f и g заданы равенствами

$$\begin{aligned}f(0) &= a \\g(0) &= b \\f(s(n)) &= F(n, f(n), g(n)) \\g(s(n)) &= G(n, f(n), g(n))\end{aligned}$$

где a и b — числа, а F и G — бинарные примитивно рекурсивные функции. Тогда f и g примитивно рекурсивны.

- **Доказательство.**

$$\begin{aligned}h(0) &= [a, b] \\h(s(n)) &= [F(n, p_1(h(n)), p_2(h(n))), \\&\quad G(n, p_1(h(n)), p_2(h(n)))]\end{aligned}$$

$$f(x) = p_1(h(x)), \quad g(x) = p_2(h(x)). \quad \blacksquare$$

- Пусть $g(x)$ и $h(x, y)$ — унарная и бинарная примитивно рекурсивные функции, причем $g(x) < x$ при положительных x . Тогда унарная функция f , заданная равенствами

$$f(0) = a$$

$$f(n) = h(n, f(g(n)))$$

примитивно рекурсивна.

- **Доказательство.** (см. Верещагина и Шеня)
- Мораль: при определении примитивной рекурсии можно использовать не только предыдущее, но и любое меньшее значение.

- 1 Машина Тьюринга
- 2 Прimitивно рекурсивные функции
- 3 Прimitивно рекурсивные функции и машины Тьюринга

- **Теорема.** Пусть f — вычислимая на машине Тьюринга функция, и время ее работы на входе x не превышает $g(x)$, где $g(x)$ — некоторая примитивно рекурсивная функция. Тогда $f(x)$ — примитивно рекурсивная функция.
- **Доказательство.**

