

Математическая логика и теория вычислимости

Лекция 10. Секвенциальное исчисление предикатов

Денис Николаевич Москвин

Кафедра математических и информационных технологий
Санкт-Петербургского академического университета

17.04.2017

- 1 Элиминация кванторов
- 2 Поиск контрпримера для формул с кванторами
- 3 Секвенциальное исчисление предикатов

- 1 Элиминация кванторов
- 2 Поиск контрпримера для формул с кванторами
- 3 Секвенциальное исчисление предикатов

Невыразимые предикаты

- Мы умеем доказывать невыразимость предиката (в заданных сигнатуре и интерпретации), показывая его неустойчивость относительно некоторого автоморфизма.
- Но, например, весьма бедная пара из сигнатуры $(0^0, S^1, =^2)$ и нормальной интерпретации с носителем \mathbb{Z} , $[0] = 0$ и $[S] = \lambda x.x + 1$ не имеет ни одного автоморфизма.
Почему $x \mapsto x + 1$ не подходит?
- Более общий способ:
 - предъявить класс предикатов;
 - индуктивно доказать что он содержит все выразимые;
 - показать, что наш предикат не содержится в этом классе.
- Сконструируем такой класс для приведенного примера (это будут предикаты, выразимые бескванторными формулами).

Сведение к бескванторным формулам

- Две формулы A и B данной сигнатуры назовем *эквивалентными* в данной интерпретации (нотация $A \sim B$), если они выражают один и тот же предикат.
- **Утверждение.** Для любой формулы рассматриваемой сигнатуры в рассматриваемой интерпретации имеется эквивалентная ей бескванторная формула.
- **Доказательство.** (Индукция по длине формулы.)
Формула $\forall x\varphi$ эквивалентна $\neg\exists x\neg\varphi$, поэтому единственный живой случай — когда формула имеет вид

$$\psi = \exists x\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$$

где (по IH) φ — бескванторная, то есть сконструированная пропозициональными связками из атомарных формул вида

$$S(S(\dots(S(u))\dots)) = S(S(\dots(S(v))\dots))$$

Сведение к бескванторным формулам (2)

Атомарные формулы

$$S(S(\dots(S(u))\dots)) = S(S(\dots(S(v))\dots))$$

могут иметь вид (1) $x = x + c$ (меняем на истину при $c = 0$, на ложь в остальных случаях), (2) $x = c$, (3) $x + c = 0$, (4) $x = x_i + c$, (5) $x + c = x_i$.

Иначе говоря, все атомарные формулы можно записать в виде $x = t_i$, где t_i либо целая константа C_i , либо $x_j + C_i$ (C_i может быть и меньше нуля!). Построим

$$\psi' = \varphi(t_1, x_1, \dots, x_n) \vee \varphi(t_2, x_1, \dots, x_n) \vee \dots \vee \varphi(t_k, x_1, \dots, x_n)$$

$$\psi'' = \varphi[(x = t_1) := F][(x = t_2) := F] \dots [(x = t_k) := F]$$

$$\psi = \exists x \varphi(x, x_1, \dots, x_n)$$

$$\psi \sim \psi' \vee \psi'' \quad \blacksquare$$

Невыразимость отношения порядка

- Отношения порядка $x < y$ невыразимо в наших сигнатуре и интерпретации.
- Действительно, кванторы допускают элиминацию, а все атомарные формулы имеют вид $x = y + C$.
- Но формулы такого типа не различают ситуации $x \gg y$ и $x \ll y$.

- Рассмотрим расширенную сигнатуру $(0^0, S^1, =^2, <^2)$ и ее нормальную интерпретацию с носителем \mathbb{Z} , $[0] = 0$, $[S] = \lambda x.x + 1$ и $[<] = <$.
- **Утверждение.** Для любой формулы расширенной сигнатуры в рассматриваемой интерпретации имеется эквивалентная ей бескванторная формула.
- **Доказательство.**
 - Теперь атомарных формул больше, помимо $x = t_i$ у нас будут $x < t_i$ и $t_i < x$.
 - Вместо ψ'' нам нужно попробовать числа из всех промежутков, на которые $\{t_i\}$ разбивает \mathbb{Z}
 - Подойдет такая конструкция

$$\psi' = \varphi(t_1, x_1, \dots, x_n) \vee \dots \vee \varphi(t_k, x_1, \dots, x_n)$$

$$\psi'' = \varphi(t_1 - 1, x_1, \dots, x_n) \vee \dots \vee \varphi(t_k - 1, x_1, \dots, x_n)$$

$$\psi''' = \varphi(t_1 + 1, x_1, \dots, x_n) \vee \dots \vee \varphi(t_k + 1, x_1, \dots, x_n)$$

$$\psi \sim \psi' \vee \psi'' \vee \psi''' \quad \blacksquare$$

- 1 Элиминация кванторов
- 2 Поиск контрпримера для формул с кванторами
- 3 Секвенциальное исчисление предикатов

Что такое контрпример в ИП?

- Формула ИП φ общезначима тогда и только тогда, когда не существует интерпретации и оценки, в которых φ является ложной.
- Значит *контрпримером* к формуле ИП должна служить пара из интерпретации и оценки π в этой интерпретации, в которых φ ложна.
- Поиск контрпримера осуществляется, как и прежде, разбором формулы: то, что должно быть истинным записываем слева от значка \vdash , а то что должно быть ложным — справа.
- Разбор пропозициональных связок проводится точно так же, как в исчислении высказываний.

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $\exists x P(x) \vee Q(y) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(y))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка \vdash , а то что должно быть ложным — справа.

$$\vdash \exists x P(x) \vee Q(y) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(y))$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $\exists x P(x) \vee Q(y) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(y))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка \vdash , а то что должно быть ложным — справа.

$$\frac{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash \forall x (P(x) \vee Q(y))}{\vdash \exists x P(x) \vee Q(y) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(y))}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $\exists x P(x) \vee Q(y) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(y))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка \vdash , а то что должно быть ложным — справа.

$$\frac{\frac{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash P(x_1) \vee Q(y)}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash \forall x (P(x) \vee Q(y))}}{\vdash \exists x P(x) \vee Q(y) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(y))}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $\exists x P(x) \vee Q(y) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(y))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка \vdash , а то что должно быть ложным — справа.

$$\frac{\frac{\frac{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash P(x_1), Q(y)}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash P(x_1) \vee Q(y)}}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash \forall x (P(x) \vee Q(y))}}{\vdash \exists x P(x) \vee Q(y) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(y))}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $\exists x P(x) \vee Q(y) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(y))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка \vdash , а то что должно быть ложным — справа.

$$\frac{\frac{\frac{\exists x P(x) \vdash P(x_1), Q(y)}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash P(x_1), Q(y)}}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash P(x_1) \vee Q(y)}}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash \forall x (P(x) \vee Q(y))}}{\vdash \exists x P(x) \vee Q(y) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(y))}$$

- Справа контрпримера нет: $Q(y)$ одновременно должно быть истинным и ложным в искомой интерпретации.

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $\exists x P(x) \vee Q(y) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(y))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка \vdash , а то что должно быть ложным — справа.

$$\frac{\frac{\frac{P(x_2) \vdash P(x_1), Q(y)}{\exists x P(x) \vdash P(x_1), Q(y)} \quad Q(y) \vdash P(x_1), Q(y)}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash P(x_1), Q(y)}}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash P(x_1) \vee Q(y)}}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash \forall x (P(x) \vee Q(y))} \\ \vdash \exists x P(x) \vee Q(y) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(y))$$

- Справа контрпримера нет: $Q(y)$ одновременно должно быть истинным и ложным в искомой интерпретации.
- Слева — есть. Носитель $D = \{x_1, x_2, y\}$;
интерпретация: $[P(x_2)] = T$, $[P(x_1)] = F$, $[Q(y)] = F$;
оценка $\pi(z) = z$ для любой переменной z .

Будем разбирать формулу $Q(f(y)) \rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$,
записывая то, что должно быть истинным слева от значка \vdash , а
то что должно быть ложным — справа.

$$\vdash Q(f(y)) \rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$$

Будем разбирать формулу $Q(f(y)) \rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$,
записывая то, что должно быть истинным слева от значка \vdash , а
то что должно быть ложным — справа.

$$\frac{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x))}{\vdash Q(f(y)) \rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))}$$

Будем разбирать формулу $Q(f(y)) \rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка \vdash , а то что должно быть ложным — справа.

$$\frac{\frac{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x)), P(\tau_1) \vee Q(\tau_1)}{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x))}}{\vdash Q(f(y)) \rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))}$$

- τ_1 маркирует произвольный терм, который мы потом можем конкретизировать удобным нам образом.

Будем разбирать формулу $Q(f(y)) \rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка \vdash , а то что должно быть ложным — справа.

$$\frac{\frac{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x)), P(\tau_1), Q(\tau_1)}{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x)), P(\tau_1) \vee Q(\tau_1)}}{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x))}}{\vdash Q(f(y)) \rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))}$$

- τ_1 маркирует произвольный терм, который мы потом можем конкретизировать удобным нам образом.
- Контрпримера нет: возьмем $\tau_1 = f(y)$.

- 1 Элиминация кванторов
- 2 Поиск контрпримера для формул с кванторами
- 3 Секвенциальное исчисление предикатов

Как и в ИВ, секвенция $\Gamma \vdash \Delta$ представляет собой два упорядоченных набора формул (возможно пустых), разделенных запятыми.

Аксиома (схема):

$$\overline{A, \Gamma \vdash A, \Delta}$$

Правила сокращения (*contraction*):

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \quad (C \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \quad (\vdash C)$$

Правила перестановки (*permutation*):

$$\frac{\Gamma, A, B, \Theta \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Theta \vdash \Delta} \quad (P \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Theta} \quad (\vdash P)$$

Правила введения пропозициональных связей

Правила введения конъюнкции в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} (\vdash \wedge)$$

Правила введения дизъюнкции в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} (\vee \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} (\vdash \vee)$$

Правила введения импликации в антецедент и сукцедент:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta} (\rightarrow \vdash) \quad \frac{A, \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} (\vdash \rightarrow)$$

Правила введения отрицания в антецедент и сукцедент:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} (\neg \vdash) \quad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} (\vdash \neg)$$

Правила введения для квантора существования

- *Правила введения дизъюнкции в антецедент и сукцедент:*

$$\frac{A_1, \Gamma \vdash \Delta \quad A_2, \Gamma \vdash \Delta}{A_1 \vee A_2, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\vee \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A_1, A_2, \Delta}{\Gamma \vdash A_1 \vee A_2, \Delta} \quad (\vdash \vee)$$

- *Правило введения \exists в антецедент:*

$$\frac{A[x := y], \Gamma \vdash \Delta}{\exists x A, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\exists \vdash)$$

Переменная y не должна входить свободно в Γ и Δ .

- *Правило введения \exists в сукцедент:*

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := \tau], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta} \quad (\vdash \exists)$$

- От всех подстановок требуется корректность.

Пример деревьев для $Q(f(y)) \rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$

Вспомним дерево поиска контрпримера

$$\frac{\frac{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x)), P(\tau_1), Q(\tau_1)}{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x)), P(\tau_1) \vee Q(\tau_1)}}{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x))}}{\vdash Q(f(y)) \rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))}$$

Мы не нашли контрпримера, но нашли вывод, взяв $\tau_1 = f(y)$.
Дерево вывода получается такой заменой и отбрасыванием ненужных здесь применений правила сокращения:

$$\frac{\frac{Q(f(y)) \vdash P(f(y)), Q(f(y))}{Q(f(y)) \vdash P(f(y)) \vee Q(f(y))} (\vdash \vee)}{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x))} (\vdash \exists)}{\vdash Q(f(y)) \rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))} (\vdash \rightarrow)$$

Правила введения для квантора всеобщности

- *Правила введения конъюнкции в антецедент и сукцедент:*

$$\frac{A_1, A_2, \Gamma \vdash \Delta}{A_1 \wedge A_2, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash A_1, \Delta \quad \Gamma \vdash A_2, \Delta}{\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2, \Delta} (\vdash \wedge)$$

- *Правило введения \forall в антецедент:*

$$\frac{A[x := \tau], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x A, \Gamma \vdash \Delta} (\forall \vdash)$$

- *Правило введения \forall в сукцедент:*

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := y], \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta} (\vdash \forall)$$

Переменная y не должна входить свободно в Γ и Δ .

- От всех подстановок требуется корректность.

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы
 $\forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)$:

$$\frac{}{\vdash \forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)} (\vdash \rightarrow)$$

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы
 $\forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)$:

$$\frac{\frac{}{\forall xP(x) \vdash \forall xP(x)} (\forall \vdash)}{\vdash \forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)} (\vdash \rightarrow)$$

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы
 $\forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)$:

$$\frac{\frac{\overline{P(\tau_1) \vdash \forall xP(x)} (\vdash \forall)}{\forall xP(x) \vdash \forall xP(x)} (\forall \vdash)}{\vdash \forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)} (\vdash \rightarrow)$$

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы $\forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)$:

$$\frac{\frac{\frac{P(\tau_1) \vdash P(y)}{P(\tau_1) \vdash \forall xP(x)} (\vdash \forall)}{\forall xP(x) \vdash \forall xP(x)} (\forall \vdash)}{\vdash \forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)} (\vdash \rightarrow)$$

Для дерева вывода возьмем $\tau_1 = y$.

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы
 $\forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)$:

$$\frac{\frac{\frac{P(\tau_1) \vdash P(y)}{P(\tau_1) \vdash \forall xP(x)} (\vdash \forall)}{\forall xP(x) \vdash \forall xP(x)} (\forall \vdash)}{\vdash \forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)} (\vdash \rightarrow)$$

Для дерева вывода возьмем $\tau_1 = y$.

Другой порядок сразу даст дерево вывода

$$\frac{}{\vdash \forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)} (\vdash \rightarrow)$$

Построим вывод для безусловно верной формулы $\forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)$:

$$\frac{\frac{\frac{P(\tau_1) \vdash P(y)}{P(\tau_1) \vdash \forall xP(x)} (\vdash \forall)}{\forall xP(x) \vdash \forall xP(x)} (\forall \vdash)}{\vdash \forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)} (\vdash \rightarrow)$$

Для дерева вывода возьмем $\tau_1 = y$.

Другой порядок сразу даст дерево вывода

$$\frac{\frac{}{\forall xP(x) \vdash \forall xP(x)} (\vdash \forall)}{\vdash \forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)} (\vdash \rightarrow)$$

Построим вывод для безусловно верной формулы $\forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)$:

$$\frac{\frac{\frac{P(\tau_1) \vdash P(y)}{P(\tau_1) \vdash \forall xP(x)} (\vdash \forall)}{\forall xP(x) \vdash \forall xP(x)} (\forall \vdash)}{\vdash \forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)} (\vdash \rightarrow)$$

Для дерева вывода возьмем $\tau_1 = y$.

Другой порядок сразу даст дерево вывода

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\forall xP(x) \vdash P(y)}}{\forall xP(x) \vdash \forall xP(x)} (\forall \vdash)}{\vdash \forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)} (\vdash \rightarrow)}$$

Построим вывод для безусловно верной формулы $\forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)$:

$$\frac{\frac{\frac{P(\tau_1) \vdash P(y)}{P(\tau_1) \vdash \forall xP(x)} (\vdash \forall)}{\forall xP(x) \vdash \forall xP(x)} (\forall \vdash)}{\vdash \forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)} (\vdash \rightarrow)$$

Для дерева вывода возьмем $\tau_1 = y$.

Другой порядок сразу даст дерево вывода

$$\frac{\frac{\frac{P(y) \vdash P(y)}{\forall xP(x) \vdash P(y)} (\forall \vdash)}{\forall xP(x) \vdash \forall xP(x)} (\vdash \forall)}{\vdash \forall xP(x) \rightarrow \forall xP(x)} (\vdash \rightarrow)$$

Ясно, что за τ надо сразу брать y .

Выводима ли эта формула?

$$\forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))$$

Выводима ли эта формула?

$$\frac{P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))}{\forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} \text{ (}\vdash \forall\text{)}$$

Выводима ли эта формула?

$$\frac{\frac{\frac{}{P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash P(y) \rightarrow P(f(f(y)))} (\vdash \rightarrow)}{P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\vdash \forall)}{\forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\forall)$$

Выводима ли эта формула?

$$\frac{\frac{\frac{}{P(y), P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))} (\rightarrow \vdash)}{P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash P(y) \rightarrow P(f(f(y)))} (\vdash \rightarrow)}{P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash \forall x (P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\vdash \forall)}{\forall x (P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash \forall x (P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\forall)$$

Выводима ли эта формула?

$$\frac{\frac{\frac{P(y) \vdash P(\tau), P(f(f(y))) \quad P(y), P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}{P(y), P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))} (\rightarrow\vdash)}{P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash P(y) \rightarrow P(f(f(y)))} (\vdash\rightarrow)}{P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\vdash\forall)}{\forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\forall)$$

Ничего не выходит: одновременно нельзя $\tau := y$ и $\tau := f(y)$.

Выводима ли эта формула?

$$\frac{\frac{\frac{P(y) \vdash P(\tau), P(f(f(y))) \quad P(y), P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}{P(y), P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))} (\rightarrow\vdash)}{P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash P(y) \rightarrow P(f(f(y)))} (\vdash\rightarrow)}{P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\vdash\forall)}{\forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\forall)$$

Ничего не выходит: одновременно нельзя $\tau := y$ и $\tau := f(y)$.
Выход есть: контрприменить правило сокращения (contraction)
и дальше получить два разных τ_1 и τ_2 :

$$\forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))$$

Выводима ли эта формула?

$$\frac{\frac{\frac{P(y) \vdash P(\tau), P(f(f(y))) \quad P(y), P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}{P(y), P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))} (\rightarrow \vdash)}{P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash P(y) \rightarrow P(f(f(y)))} (\vdash \rightarrow)}{P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\vdash \forall)}{\forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\forall)$$

Ничего не выходит: одновременно нельзя $\tau := y$ и $\tau := f(y)$.
Выход есть: контрприменить правило сокращения (contraction)
и дальше получить два разных τ_1 и τ_2 :

$$\frac{\forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))), \forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))}{\forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\forall)$$

Выводима ли эта формула?

$$\frac{\frac{\frac{P(y) \vdash P(\tau), P(f(f(y))) \quad P(y), P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}{P(y), P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))} (\rightarrow \vdash)}{P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash P(y) \rightarrow P(f(f(y)))} (\vdash \rightarrow)}{P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\vdash \forall)}{\forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\forall \vdash)$$

Ничего не выходит: одновременно нельзя $\tau := y$ и $\tau := f(y)$.
Выход есть: контрприменить правило сокращения (contraction)
и дальше получить два разных τ_1 и τ_2 :

$$\frac{\frac{P(\tau_1) \rightarrow P(f(\tau_1)), \forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))}{\forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))), \forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\forall \vdash)}{\forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\forall \vdash)$$

Выводима ли эта формула?

$$\frac{\frac{\frac{P(y) \vdash P(\tau), P(f(f(y))) \quad P(y), P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}{P(y), P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))} (\rightarrow \vdash)}{P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash P(y) \rightarrow P(f(f(y)))} (\vdash \rightarrow)}{P(\tau) \rightarrow P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\vdash \forall)}{\forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\forall)$$

Ничего не выходит: одновременно нельзя $\tau := y$ и $\tau := f(y)$.
Выход есть: контрприменить правило сокращения (contraction)
и дальше получить два разных τ_1 и τ_2 :

$$\frac{\dots}{\frac{\frac{P(\tau_1) \rightarrow P(f(\tau_1)), P(\tau_2) \rightarrow P(f(\tau_2)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))}{P(\tau_1) \rightarrow P(f(\tau_1)), \forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\forall \vdash)}{\forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))), \forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\forall)}{\forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x))))} (\forall)$$

Полнота и корректность секвенциального исчисления предикатов

- **Теорема (о корректности).** Любая формула, выводимая в секвенциальном исчислении предикатов, является общезначимой.
- **Набросок доказательства.** (1) Аксиома общезначима. (2) Правила вывода сохраняют общезначимость. ■
- **Следствие.** Секвенциальное ИП непротиворечиво.
- **Теорема (о полноте).** Любая общезначимая формула выводима в секвенциальном исчислении предикатов.
- **Набросок доказательства.** (1) Строим алгоритм на основе поиска вывода снизу вверх (постоянно применяем правило сокращения при введении метапеременной для терма). (2) Показываем, что если он не завершается, то формула не общезначима, а если завершается, то либо дерево вывода, либо контрпример. ■

- <http://logitext.mit.edu/>
- Logitext is an educational proof assistant for first-order classical logic using the sequent calculus.
- It is intended to assist students who are learning Gentzen trees as a way of structuring derivations of logical statements.
- All you need to do is click on a clause to see what inference rule is triggered.
- In some cases, an input box will pop up; enter a lower case expression like z or $f(x)$.
- You can also choose to duplicate the rules by clicking "Contraction".