Теория категорий

Декартово замкнутые категории

Валерий Исаев

02 марта 2017 г.

План лекции

Произведения

Декартово замкнутые категории

Интерпретация лямбда исчисления

Терминальные объекты

- В категориях **Set** и **Hask** существует много похожих объектов: $\mathbb{Z}$ и *Integer*, $\{*\}$ и $()$, $A \times B$ и (a, b).
- Существует ли обобщение этих конструкций в произвольных катгеориях?
- Объект A некоторой категории **C** называется *терминальным*, если для любого объекта B существует уникальная стрелка $B \to A$.
- Другими словами, A является терминальным, если для любого B множество $Hom_{\mathbf{C}}(B, A)$ одноэлементно.

Примеры терминальных объектов

- В **Set** множество терминально тогда и только тогда, когда оно одноэлементно.
- В **Grp** группа терминальна тогда и только тогда, когда она одноэлементна.
- В **Hask** есть следующие терминальные объекты: $()$, $data\ Unit = Unit$.
- Утверждение строчкой выше не является верным :(
- В группоиде существует терминальный объект только если он тривиален.

Уникальность терминальных объектов

Proposition

Любые два терминальных объекта изоморфны.

Доказательство.

Если A и B – терминальные объекты, то существует пара стрелок $f : A \to B$ и $g : B \to A$. При этом по уникальности верно, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = id_B$. □

Уникальность терминальных объектов

Proposition

Любые два терминальных объекта изоморфны.

Доказательство.

Если A и B – терминальные объекты, то существует пара стрелок $f : A \to B$ и $g : B \to A$. При этом по уникальности верно, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = id_B$. □

Терминальный объект обычно обозначают 1. Уникальный морфизм из X в 1 обычно обозначают $!_X : X \to 1$.

Декартово произведение

- Множество B вместе с парой функций $\pi_i : B \to A_i$ является декартовым произведением множеств A_1 и A_2, если для любых $a_i \in A_i$ существует уникальный $b \in B$ такой, что $\pi_i(b) = a_i$.
- Объект B вместе с парой отображений $\pi_i : B \to A_i$ называется декартовым произведением A_1 и A_2, если для любых $f_i : C \to A_i$ существует уникальная стрелка $h : C \to B$ такая, что $\pi_i \circ h = f_i$.

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A_1 & B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & A_2
\end{tikzcd}
$$

Уникальность декартова произведения

Proposition

Если (B, π_i^B) и (C, π_i^C) – произведения объектов A_1 и A_2, то B и C изоморфны.

Доказательство.

По определению декартова произведения существуют стрелки $g : B \to C$ и $h : C \to B$ как на диаграмме ниже. По уникальности $h \circ g = id_B$ и, аналогично, $g \circ h = id_C$.

$$
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, "\pi_1^B"'] \arrow[dr, "\pi_2^B"] \arrow[d, dashed, "g"] & \\
A_1 & C \arrow[l, "\pi_1^C"] \arrow[r, "\pi_2^C"'] \arrow[d, dashed, "h"] & A_2 \\
 & B \arrow[ul, "\pi_1^B"] \arrow[ur, "\pi_2^B"'] &
\end{tikzcd}
$$

Произведение множества объектов

- Если $\{A_i\}_{i\in I}$ – колекция объектов некоторой категории, то объект B вместе с морфизмами $\pi_i : B \to A_i$ называется декартовым произведением объектов A_i, если для любой коллекции морфизмов $\{f_i : C \to A_i\}_{i\in I}$ существует уникальная стрелка $h : C \to B$ такая, что $\pi_i \circ h = f_i$.
- Декартово произведение объектов $\{A_i\}_{i\in I}$ уникально с точностью до изоморфизма.
- Оно обозначается $\prod\limits_{i\in i} A_i$. Если $I = \{1, \ldots n\}$, то оно обозначается $A_1 \times \ldots \times A_n$. Уникальный морфизм $C \to A_1 \times \ldots \times A_n$ обозначается $\langle f_1, \ldots f_n\rangle$.

Декартовы категория

Категория, в которой существует терминальный объект и бинарные произведения, называется *декартовой*.

Декартовы категория

Категория, в которой существует терминальный объект и бинарные произведения, называется *декартовой*.

Proposition

Категория декартова тогда и только тогда, когда в ней существуют все конечные произведения.

Доказательство.

Терминальный объект – произведение пустого множества объектов, бинарные произведения – произведение двух объектов. И наоборот, произведение A_i можно сконструировать как

$$A_1 \times (A_2 \times \ldots (A_{n-1} \times A_n) \ldots)$$

Это можно доказать по индукции. $\square$

План лекции

Произведения

Декартово замкнутые категории

Интерпретация лямбда исчисления

Мотивация

- Очередная конструкция, которую мы хотим обобщить, – это множество/тип функций.
- Эта конструкция называется по разномы: экспонента, внутренний Hom.
- Пусть A и B – объекты декартовой категории $\mathbf{C}$. Тогда экспонента обозначаются либо B^A, либо $[A, B]$.
- Какие операции должны быть определены для B^A.
- Как минимум мы должны иметь аппликацию, которая обычно обозначается ev и является следующим морфизмом:
$$ev : B^A \times A \to B$$
- Морфизм ev позволяет нам "вычислять" элементы B^A.

Элементы объекта (a side note)

- В категории **Set** элементы множества X соответствуют морфизмам из термнального объекта в X.
- В произвольной категории (с терминальным объектом) мы можем определить элемент объекта таким же образом.
- Но это не очень полезное определение, так как в произвольной категории объект не определяется своими элементами.
- Например, в категории графов морфизмы из терминального графа в граф X соответствуют петлям X.
- Мы можем определить *обощенный элемент* объекта X как морфизм из произвольного объекта Γ в X.
- В категории графов вершины и ребра графа X являются его обобщенными элементами (конечно, существует и много других обобщенных элементов этого графа).

Определение

- Благодаря морфизму *ev*, мы можем думать об элементах B^A как о морфизмах $A \to B$. Мы еще должны сказать, что B^A содержит *все* такие морфизмы.
- То есть мы должны сказать чему соответствуют обобщенные элементы B^A. Ясно, что у нас должна быть биекция между обобщенными элементами $\Gamma \to B^A$ и морфизмами $\Gamma \times A \to B$.
- Имея морфизм $f : \Gamma \to B^A$, мы можем построить его каррирование следующим образом:

$$\Gamma \times A \xrightarrow{f \times id_A} B^A \times A \xrightarrow{ev} B$$

- Объект B^A вместе с морфизмом $ev : B^A \times A \to B$ называется *экспонентой* A и B, если для любого $g : \Gamma \times A \to B$ существует уникальный $f : \Gamma \to B^A$ такой, что композиция стрелок в диаграмме выше равна g.

Примеры

- Категория называется *декартово замкнутой*, если для любых ее объектов A и B существует их экспонента B^A.
- **Set** – декартово замкнута. Действительно, B^A – это просто множество функций из A в B.
- **Agda** – декартово замкнута. Действительно, B^A – это просто тип функций из A в B.
- Все алгебраические категории, которые мы рассматривали, не являются декартово замкнутыми (**Grp**, **Vec**, **Ring**, и т.д.).
- Категория графов – декартово замнута.

Объект натуральных чисел

Definition

Объект натуральных чисел в декартово замкнутой категории – это объект $\mathbb{N}$ вместе с парой морфизмов $zero : 1 \to \mathbb{N}$ и $suc : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющие условию, что для любых других морфизмов $z : 1 \to X$ и $s : X \to X$ существует уникальная стрелка h, такая что диаграмма ниже коммутирует.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "zero"] \arrow[dr, "z"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "suc"] \arrow[d, dashed, "h"] & \mathbb{N} \arrow[d, dashed, "h"] \\ & X \arrow[r, "s"'] & X \end{tikzcd}$$

Свойства

- Объект натуральных чисел уникален с точностью до изоморфизма.
- В любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел можно определить все примитивно рекурсивные функции.
- Морфизм $suc : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ является расщепленным мономорфизмом.

План лекции

Произведения

Декартово замкнутые категории

Интерпретация лямбда исчисления

Мотивация

- Лямбда исчисление предоставляет синтаксис для (декартово замкнутых) категорий, а категории предоставляют семантику лямбда исчисления.
- С одной стороны, лямбда исчисление позволяет просто описывать различные конструкции в категориях.
- С другой стороны, различные конструкции в категориях могут мотивировать новые языковые конструкции для лямбда исчисления.

Лямбда исчисление как теория

- Для любой (односортной) алгебраической теории можно определить множество термов этой теории, построив его индуктивно из функций этой теории и переменных.
- Например, в теории групп множество термов будет включать такие термы как $x * inv(y)$ и $x * (y * inv(z)) * 1$, где x, y, z – переменные, а $*$, inv и 1 – функции теории групп.
- Типизированное лямбда исчисление можно определить как двусортную алгебраическую теорию.
- Но мы вместо этого просто определим его ручками.
- В лямбда исчислении у нас есть два сорта: сорт типов и сорт термов.

Термы лямбда исчисления

- Типы строятся индуктивно из двух бинарных функций $\times$ и $\to$ и одной константы $\top$ (и переменных).
- Термы строятся индуктивно согласно следующим правилам:

$$\frac{}{\vdash} \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma, x : A \vdash}, x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash x : A}, (x : A) \in \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash unit : \top} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash (a, b) : A \times B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : A \times B}{\Gamma \vdash fst\ p : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : A \times B}{\Gamma \vdash snd\ p : B}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash \lambda x.b : A \to B} \qquad \frac{\Gamma \vdash f : A \to B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f\ a : B}$$

Аксиомы лямбда исчисления

Кроме того, у нас есть следующие аксиомы:

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \mathit{fst}\,(a, b) \equiv a : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \mathit{snd}\,(a, b) \equiv b : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \top}{\Gamma \vdash \mathit{unit} \equiv t : \top} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : A \times B}{\Gamma \vdash (\mathit{fst}\; p,\; \mathit{snd}\; p) \equiv p : A \times B}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash (\lambda x.b)\; a \equiv b[x := a] : B} \qquad \frac{\Gamma \vdash f : A \to B}{\Gamma \vdash \lambda x.f\; x \equiv f : A \to B}$$

Интерпретация лямбда исчисления

- Что является моделями алгебраической теории лямбда исчисления (которую мы так и не построили)?
- Это в точности декартово замкнутые категории!
- Так как мы точно не определили эту теорию, то мы и не можем доказать это утверждение, но мы хотя бы можем проинтерпретировать лямбда исчисление в произвольной декартовой категории (так же как термы теории групп можно проинтерпретировать в произвольной группе).
- Пусть $\mathbf{C}$ – декартово замкнутая категория. Тогда мы будем интерпретировать типы как объекты категории, а термы как ее морфизмы.

Интерпретация типов

- Интерпретацию типов и термов мы будем обозначать как $[\![-]\!]$.
- Тогда типы интерпретируются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
[\![\top]\!] &= 1 \\
[\![A \times B]\!] &= [\![A]\!] \times [\![B]\!] \\
[\![A \to B]\!] &= [\![B]\!]^{[\![A]\!]}
\end{aligned}
$$

- Если $\Gamma = x_1 : A_1, \ldots x_n : A_n$, то мы можем определить интерпретацию Γ как $[\![\Gamma]\!] = [\![A_1]\!] \times \ldots \times [\![A_n]\!]$.

Интерпретация термов

- Теперь мы определим интерпретацию термов.
- Если $\Gamma \vdash a : A$, то $[\![a]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$.
- $[\![x_i]\!] = \pi_i$ если $\Gamma = x_1 : A_1, \ldots x_n : A_n$.
- $[\![unit]\!] = !_{[\![\Gamma]\!]}$.
- $[\![(a, b)]\!] = \langle [\![a]\!], [\![b]\!] \rangle$.
- $[\![fst\ p]\!] = \pi_1 \circ [\![p]\!]$.
- $[\![snd\ p]\!] = \pi_2 \circ [\![p]\!]$.
- $[\![f\ a]\!] = ev \circ \langle [\![f]\!], [\![a]\!] \rangle$, где $ev : [\![B]\!]^{[\![A]\!]} \times [\![A]\!] \to [\![B]\!]$.
- $[\![\lambda x.b]\!] = \varphi([\![b]\!])$, где $\varphi : Hom([\![\Gamma]\!] \times [\![A]\!], [\![B]\!]) \simeq Hom([\![\Gamma]\!], [\![B]\!]^{[\![A]\!]})$ – функция каррирования из определения экспонент.

Проверка аксиом

- Разумеется нам нужно проверить, что эта интерпретация уважает аксиомы.
- Для этого сначала нужно доказать лемму, что подстановка интерпретируется как композиция, то есть если $\Gamma, x : A \vdash b : B$ и $\Gamma \vdash a : A$, то $[\![b[x := a]]\!] = [\![b]\!] \circ \langle id_{[\![\Gamma]\!]}, [\![a]\!]\rangle$. Это легко сделать индукцией по b.
- Теперь бета эквивалентность соответствуют тому, что функция каррирования и обратная к ней дают тождественную функцию при композиции, а эта эквивалентность соответствует тому, что эти функции дают id при композиции в обратном порядке.
- Аксиомы для $\top$ и $\times$ легко следуют из определения произведений.