Домашнее задание №5

Группа 504

Количество баллов на зачёт: **8**

1. *(1 балл)* Пусть G есть простой граф, степень любой вершины которого больше или равна δ, $\delta \geq 2$. Доказать, что в графе G существует цикл длины, большей или равной $\delta + 1$.
2. *(1 балл)* Пусть G есть граф, обхват $g(G)$ которого меньше бесконечности. Доказать, что для такого графа справедливо неравенство вида $g(G) \leq 2\,\mathrm{diam}(G) + 1$.
3. *(2 балла)* Доказать, что любой граф G без петель содержит остовный двудольный подграф F, степень любой вершины x в котором больше или равна $\deg(x)/2$, где $\deg(x)$ — степень той же вершины в исходном графе
4. *(2 балла)* Пусть G есть простой граф без треугольников, то есть граф, не содержащий K_3 в качестве своего индуцированного цикла. Показать, что максимальное количество ребер в таком графе не превосходит $n^2/4$.
5. *(2 балла)* Пусть G есть простой граф на 10 вершинах и 26 ребрах. Доказать, что такой граф содержит в качестве своих индуцированных подграфов по меньшей мере пять треугольников
6. *(1,5 балла)* Доказать, что максимальное количество ребер в простом двудольном графе на n вершинах не превосходит $n^2/4$ в случае, когда число вершин четно, и $(n^2 - 1)/4$ в случае, когда это число нечетно.

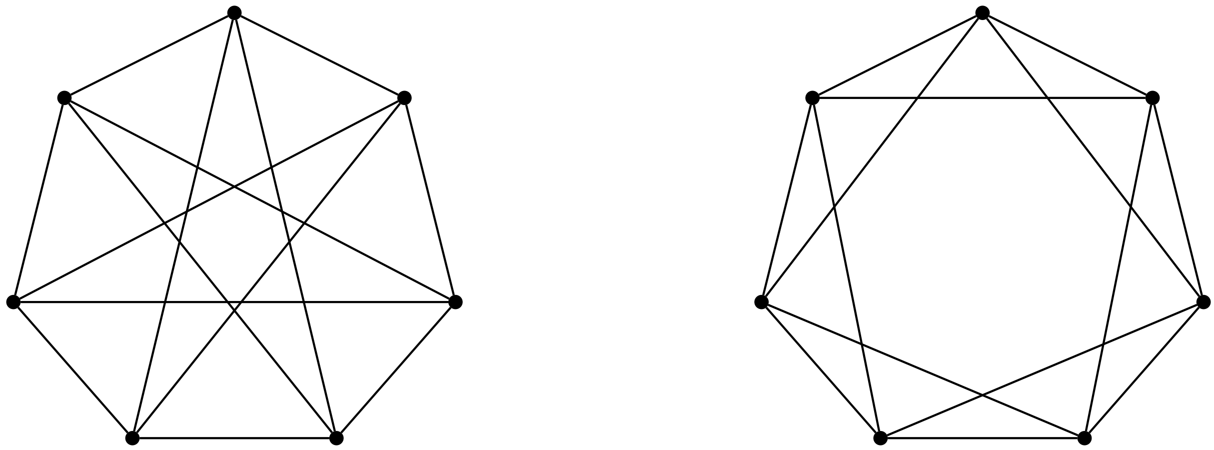

Рис. 1

7. *(1.5 балла)* Являются ли изоморфными друг другу графы, изображенные на рис.1?
8. *(1 балл)* Описать все графы на n вершинах, для которых любая n-перестановка является автоморфизмом.
9. *(1 балл)* Найти граф, не изоморфный циклу C_4, группа автоморфизмов которого совпадает с группой $\mathrm{Aut}(C_4)$ автоморфизма графа C_4.
10. *(1,5 балла)* Доказать, что порядок группы автоморфизмов любого турнира есть нечетное число.