DL 11.1. Покажите, что если $H[X] \leqslant t$, то найдется такое значение b, что $\Pr[X = b] \geqslant 2^{-t}$.

DL 11.2. Рассмотрим функцию $h(p) = p \log \frac{1}{p} + (1-p) \log \frac{1}{1-p}$, функция определена на $[0, 1]$, $h(0) = h(1) = 0$. Покажите, что:

a) $h(p)$ строго возрастает на $[0, \frac{1}{2}]$ и убывает на $[\frac{1}{2}, 1]$;

b) h выпукла вверх.

DL 11.3. Пусть есть бинарное дерево и в нем n листьев. Пусть $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ — это глубины всех листьев дерева. Докажите, что:

a) $\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{-\ell_i} \leqslant 1$;

b) если $\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{-\ell_i} \leqslant 1$, то найдётся дерево из n листьев с глубинами $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$.

DL 11.4. Пусть есть бинарное дерево и в нем n листьев. Покажите, что:

a) глубина хотя бы одного листа не меньше $\log n$;

b) средняя глубина листа не меньше $\log n$.

(Более строгая формулировка: рассмотрим случайную величину, которая выбирает случайный лист и выдает его глубину; докажите, что математическое ожидание этой случайной величины не меньше $\log n$.)

DL 10.2. Каждый из k человек в лифте, который стоит на первом этаже выбирает случайный этаж равновероятно из оставшихся n этажей. Чему равняется математическое ожидание числа остановок, которые сделает лифт?

DL 10.3.

a) Докажите, что в любом турнире есть гамильтонов путь.

b) Докажите, что в сильно связном турнире есть гамильтонов цикл.

DL 10.4. Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

DL 10.5. Доминирующее множество в графе — это такое множество, что для каждой вершины, либо она сама лежит в этом множестве, либо она соединена ребром с вершиной из этого множества. В графе G минимальная степень вершины равняется $d > 1$. Докажите, что в G есть доминирующее множество размера не больше $n\frac{1+\ln(d+1)}{d+1}$.
Подсказка: рассмотрите случайное подмножество вершин, в которое каждая вершина включается с вероятностью $p = \frac{\ln(d+1)}{d+1}$.

DL 9.1. Пусть каждая вершина неориентированного графа имеет степень не больше, чем k. Докажите, что вершины графа можно покрасить

b) в $[k/2] + 1$ цвет так, чтобы для каждой вершины не более одного ребра исходило в вершины того же цвета ($[x]$ обозначает целую часть числа x).

DL 9.6. В школе в каждом кружке учится $n \geqslant 4$ человек, число кружков не превосходит $\frac{4^{n-1}}{3^n}$. Докажите, что можно всем школьникам выставить оценки по поведению (четыре оценки: от 2 до 5), что в каждом кружке будут представлены все 4 оценки.

DL 8.2.

b) Докажите, что если в неориентированном графе n вершин и $n-k$ рёбер, то в нем как минимум k компонент связности.

DL 8.3. Дана сетка в виде квадрата $n \times n$. Разрешается разрезать любое ребро сетки. Какое максимальное число разрезов можно сделать так, чтобы сетка не развалилась на части?

DL 8.6. В связном графе на каждом ребре написали положительное вещественное число. Вес остовного дерева — это сумма чисел на рёбрах, содержащихся в этом дереве. Докажите, что:

a) минимальное по весу остовное дерево содержит хотя бы одно ребро минимального веса;

b) каждое ребро минимального веса содержится хотя бы в одном из остовных деревьев минимального веса.

DL 7.1. Вычислите суммы:

b) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k k^m \cdot \binom{n}{k}$, где $m < n$.

DL 7.3.

b) Покажите, что число ломанных, из $(0,0)$ в $(2n,0)$, пересекающих прямую $y=-1$, равняется числу ломанных из $(0,0)$ в $(2n,-2)$.

c) Найдите число ломанных из $(0,0)$ в $(2n,0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость. Это число называется числом Каталана C_n.

d) Покажите, что $C_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$.

DL 7.6.

a) Докажите, что любое семейство непересекающихся интервалов на прямой конечно или счетно.

b) Докажите, что множество точек строгого локального минимума любой функции из $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ конечно или счетно.

DL 7.7. Докажите, что если множество на плоскости содержит отрезок, то оно равномощно $\mathbb{R}$.

DL 5.6. Пусть сигнатура содержит предикат равенства и трёхместный предикат S. Интерпретация: носитель — точки на плоскости, $S(X,Y,Z)$ означает, что $|XZ| = |YZ|$. Выразите предикат: A, B, C лежат на одной прямой.

DL 4.3. Докажите, что если булева функция вычисляется с помощью ветвящейся программы размера S, то она вычисляется и с помощью булевой схемы размера $O(S)$.

DL 4.4. Покажите, что если булева функция вычисляется с помощью схемы полиномиального от числа входов размера и глубиной $O(\log(n))$, то она вычисляется и формулой полиномиального от числа переменных размера.

$\boxed{\textbf{DL 4.5.}}$ **(Топологическая сортировка)** Докажите, что в ориентированном графе $G(V, E)$ без циклов все вершины можно пронумеровать числами от 1 до $|V|$ таким образом, чтобы рёбра шли из вершин с меньшими номерами в вершины с большими номерами.

$\boxed{\textbf{DL 4.6.}}$ Правило *ослабления* позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B. Покажите, что если из дизъюнктов $D_1, D_2, \ldots, D_n$ семантически следует дизъюнкт C (это значит, что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i, выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

$\boxed{\textbf{DL 3.3.}}$ Как модифицировать рассказанный на лекции алгоритм, проверяющий выполнимость формулы в 2-КНФ, чтобы он за полиномиальное от числа переменных время также выдавал набор значений переменных, который выполняет формулу?

Определение 3.1. Булева функция называется самодвойственной, если выполняется равенство $f(1 - x_1, 1 - x_2, \ldots, 1 - x_n) = 1 - f(x_1, \ldots, x_n)$. Булева функция называется линейной, если она имеет вид $f(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \bmod 2$, где $a_i \in \{0, 1\}$.

$\boxed{\textbf{DL 3.5.}}$ **(Теорема Поста)** Пусть есть набор булевых функций, среди которых есть немонотоная, не сохраняющая ноль (т. е., $f(0, \ldots, 0) = 1$), не сохраняющая единицу (т. е., $g(1, \ldots, 1) = 0$), нелинейная, несамодвойственная. Докажите, что:

c) если набор булевых функций не удовлетворяет условию теоремы Поста, то через композицию этих функций нельзя выразить все булевы функции.

$\boxed{\textbf{DL 2.2.}}$ Булева функция $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ называется монотонной, если при $x \leqslant y$ выполняется $f(x) \leqslant f(y)$ ($x \leqslant y$, если для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ выполняется $x_i \leqslant y_i$). Докажите, что:

b) монотонную булеву функцию можно записать в виде формулы, которая использует только связки $\vee$ и $\wedge$.