Курс: Функциональное программирование
Практика 3. Просто типизированное λ-исчисление.

Разминка

► Придумайте контекст Γ, в котором верны утверждения типизации

$$
\begin{array}{lcl}
\Gamma & \vdash & x : \alpha \\
\Gamma & \vdash & x\,y : \alpha \\
\Gamma & \vdash & x\,y : \alpha \to \beta \\
\Gamma & \vdash & \lambda\,x.\,y : \alpha \to \alpha \to \alpha \\
\Gamma & \vdash & \lambda\,x.\,y : (\alpha \to \beta) \to \alpha \\
\Gamma & \vdash & \lambda\,x.\,x : (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha \to \alpha \\
\Gamma & \vdash & \lambda\,x.\,x : (\alpha \to \beta) \to \alpha
\end{array}
$$

► Запишите приведённые выше утверждения типизации в стиле Чёрча.

Стандартные типы

► Какой тип можно приписать булевым значениям

$$
\begin{array}{lcl}
\texttt{tru} & \equiv & \lambda\,t\,f.\,t \\
\texttt{fls} & \equiv & \lambda\,t\,f.\,f
\end{array}
$$

► Какой тип можно приписать парам

$$\texttt{pair} \equiv \lambda\,x\,y\,f.\,f\,x\,y$$

► Какой тип можно приписать числам Чёрча

$$
\begin{array}{lcl}
0 & \equiv & \lambda\,s\,z.\,z \\
1 & \equiv & \lambda\,s\,z.\,s\,z \\
2 & \equiv & \lambda\,s\,z.\,s\,(s\,z) \\
3 & \equiv & \lambda\,s\,z.\,s\,(s\,(s\,z)) \\
4 & \equiv & \lambda\,s\,z.\,s\,(s\,(s\,(s\,z))) \\
 & \dots &
\end{array}
$$

► Какой тип можно приписать спискам

$$[\,] \equiv \texttt{nil} \equiv \lambda c\,n.\,n$$

$$[2] \equiv \texttt{cons}\ 2\ \texttt{nil} \equiv \lambda c\,n.\,c\ 2\ n$$

$$[3,2] \equiv \texttt{cons}\ 3\ (\texttt{cons}\ 2\ \texttt{nil}) \equiv \lambda c\,n.\,c\ 3\ (c\ 2\ n)$$

$$[5,3,2] \equiv \texttt{cons}\ 5\ (\texttt{cons}\ 3\ (\texttt{cons}\ 2\ \texttt{nil})) \equiv \lambda c\,n.\,c\ 5\ (c\ 3\ (c\ 2\ n))$$

Вывод типа

Определите тип следующих комбинаторов

► $\mathbf{B} = \lambda f\,g\,x.\,f\,(g\,x)$

- $\mathbf{B}_* = \lambda f\, g\, x.\, g\,(f\, x)$
- $\mathbf{S} = \lambda f\, g\, x.\, f\, x\,(g\, x)$

Определите тип комбинаторов

- $\lambda x\, y.\, x\,(y\, x)$
- $\lambda x\, y.\, x\, y\, x$

Тип комбинатора неподвижной точки

Пусть мы решили расширить исчисление комбинатором неподвижной точки `fix` с правилом δ-конверсии

$$\mathtt{fix}\ f \ =_\delta\ f\,(\mathtt{fix}\ f)$$

Какой тип можно было бы ему приписать непротиворечивым образом?

Экспансия субъекта

Операция, обратная β-редукции называется экспансией (расширением). Множество типизируемых в $\lambda\!\to$ термов не замкнуто относительно экспансии:

$$M \twoheadrightarrow_\beta N \ \wedge\ \Gamma \vdash N{:}\sigma \ \not\Rightarrow\ \Gamma \vdash M{:}\sigma$$

Действительно, рассмотрим терм $\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\Omega}$ ($\mathbf{I} \equiv \lambda x.\, x$, $\mathbf{K} \equiv \lambda x\, y.\, x$, $\boldsymbol{\Omega} \equiv \lambda x.\, x\, x$). Хотя $\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\Omega} \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{I}$:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\Omega} \ \to_\beta\ (\lambda y.\, \mathbf{I})\,\boldsymbol{\Omega} \ \to_\beta\ \mathbf{I}$$

и $\vdash \mathbf{I}{:}\sigma\to\sigma$, но $\nvdash \mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\Omega}{:}\sigma\to\sigma$, поскольку последнее содержит нетипизируемый подтерм.

Для $\lambda\!\to$ а ля Чёрч экспансия не сохраняет тип только из-за возможного наличия нетипизируемого подтерма.

Для $\lambda\!\to$ а ля Карри верно более сильное отрицание:

$$M \twoheadrightarrow_\beta N \ \wedge\ \Gamma \vdash M{:}\sigma \ \wedge\ \Gamma \vdash N{:}\tau \ \not\Rightarrow\ \Gamma \vdash M{:}\tau$$

Покажем это на примере.

Возьмём $M \equiv \mathbf{S}\,\mathbf{K}$ и $N \equiv \mathbf{K}_*$.

$$\begin{array}{rl}
\mathbf{S} \equiv \lambda f\, g\, z.\, f\, z\,(g\, z) & \vdash \mathbf{S}{:}(\sigma\to\tau\to\rho)\to(\sigma\to\tau)\to\sigma\to\rho \\
\mathbf{K} \equiv \lambda x\, y.\, x & \vdash \mathbf{K}{:}\sigma\to\tau\to\sigma \\
 & \vdash (\mathbf{S}\,\mathbf{K}){:}(\sigma\to\tau)\to\sigma\to\sigma \\
\mathbf{K}_* \equiv \lambda x\, y.\, y & \vdash \mathbf{K}_*{:}\tau\to\sigma\to\sigma
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{S}\,\mathbf{K} & \to_\beta & \lambda g\, z.\, \mathbf{K}\, z\,(g\, z) \ \to_\beta \\
 & \to_\beta & \lambda g\, z.\, (\lambda y.\, z)\,(g\, z) \to_\beta \lambda g\, z.\, z \ \equiv_\alpha\ \mathbf{K}_*
\end{array}$$

В красной редукции потерялась информация о типе g, как о функциональном, $(g\, z){:}\tau \Rightarrow z{:}\sigma,\ g{:}\sigma\to\tau$.

Для $\lambda\to$ в стиле Чёрча информация не теряется:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{S}_{\sigma\tau\rho} & \equiv & \lambda f^{\sigma\to\tau\to\rho}\, g^{\sigma\to\tau}\, z^{\sigma}.\, f\, z\, (g\, z) \\ \mathbf{K}_{\sigma\tau} & \equiv & \lambda x^{\sigma}\, y^{\tau}.\, x \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{S}_{\sigma\tau\sigma}\, \mathbf{K}_{\sigma\tau} & \to_{\beta} & \lambda g^{\sigma\to\tau}\, z^{\sigma}.\, \mathbf{K}_{\sigma\tau}\, z\, (g\, z) \;\; \to_{\beta} \\ & \to_{\beta} & \lambda g^{\sigma\to\tau}\, z^{\sigma}.\, (\lambda y^{\tau}.\, z)\, (g\, z) \;\; \to_{\beta} \;\; \lambda g^{\sigma\to\tau}\, z^{\sigma}.\, z \\ & \equiv_{\alpha} & \lambda x^{\sigma\to\tau}\, y^{\sigma}.\, y \;\; \equiv \;\; \mathbf{K}_{*(\sigma\to\tau)\sigma} \end{array}$$

Можно переименовать связанные переменные, но не их типы.

Домашнее задание

Типизируйте по Чёрчу (1 балл)
- $\mathbf{S\,K\,K}$
- $\mathbf{S\,K\,I}$

Найдите обитателей типа (1 балл)
- $\alpha\to\beta\to\gamma\to\alpha$
- $\alpha\to\beta\to\gamma\to\beta$
- $\alpha\to\beta\to\alpha\to\alpha$
- $\alpha\to\alpha\to\alpha\to\alpha$

Сколько разных (с точностью до β-эквивалентности) термов каждого типа вы можете привести?

Сконструируйте терм типа (2 балла)
- $(\delta\to\delta\to\alpha)\to(\alpha\to\beta\to\gamma)\to(\delta\to\beta)\to\delta\to\gamma$
- $(\delta\to\delta\to\alpha)\to(\gamma\to\alpha)\to(\alpha\to\beta)\to\delta\to\gamma\to\beta$ (2 штуки)

Сконструируйте терм типа
- $(\gamma\to\epsilon)\to((\gamma\to\epsilon)\to\epsilon)\to\epsilon$

которому нельзя было бы приписать тип $\alpha\to(\alpha\to\epsilon)\to\epsilon$. (2 балла)

Сконструируйте терм типа (4 балла)
- $((\alpha\to\beta)\to\alpha)\to(\alpha\to\alpha\to\beta)\to\alpha$
- $((\alpha\to\beta)\to\alpha)\to(\alpha\to\alpha\to\beta)\to\beta$