Эйлеровы и гамильтоновы циклы

Домашнее задание №2

15 сентября 2017 г.

Обязательная часть

1 (1,5 балла)

Рассмотрим следующий алгоритм построения последовательности де Брейна

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2^k}.$$

Возьмем на первом шаге в качестве $a_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Для любого $m > k$ определим a_m как максимальное значение из $\{0, 1\}$, при котором последовательность

$$(a_{m-k+1}, \ldots, a_m)$$

не встречается в последовательности $(a_1, \ldots, a_{m-1})$ в виде непрерывной подпоследовательности. Доказать, что данный алгоритм действительно возвращает нам последовательность де Брейна.

2 (1,5 балла)

Найти одну из последовательностей де Брейна $B(3, 3)$ длины 27, построив предварительно орграф на девяти вершинах, в котором последовательности $B(3, 3)$ отвечает эйлеров цикл.

3 (0,5 балла)

Определить значения m и n, при которых полный двудольный граф $K_{m,n}$ является эйлеровым. А при каких значениях m и n в таком графе не существует эйлеров цикл, но существует эйлеров путь?

4 (1 балл)

Рассмотрим квадратную сетку, состоящую из $5 \cdot 5 = 25$ вершин, соединенных между собой сорока ребрами. Можно ли покрыть эту сетку пятью ломаными длины 8? А восемью ломаными длины 5?

5 (1 балл)

Рассмотрим связный простой регулярный граф G, степень любой вершины которого равна четырем. Доказать, что ребра этого графа всегда можно покрасить в два цвета (красный и синий) так, чтобы любая вершина была инцидентна ровно двум синим и ровно двум красным ребрам.

6 (2 балла)

Рассмотрим эйлеров граф без петель. Удалим в нем ребро $e = \{x, y\}$. Доказать, что количество $\{x, y\}$-путей (не обязательно простых, trails), в которых вершина y встречается только в конце каждого из этих путей, нечетно.

В качестве примера можно рассмотреть граф "бабочка состоящий из двух треугольников $(1, 2, 3)$ и $(3, 4, 5)$, склеенных в точке 3. Удалив в таком графе ребро $\{1, 2\}$, получаем три пути, соединяющих 1 и 2: один — простой путь $(1, 3, 2)$; два — пути, не являющиеся простыми (trails): $(1, 3, 4, 5, 3, 2)$; $(1, 3, 5, 4, 3, 2)$.

Доказать, что количество таких путей, не являющихся простыми, обязательно четно.

7 (1,5 балла)

Пусть в графе G имеется вершина x нечетной степени. Доказать, что среди инцидентных x ребер найдется ребро e, для которого количество различных циклов, проходящих через e, четно.

8 (1 балл)

С использованием двух предыдущих упражнений доказать справедливость еще одной характеризации эйлерова графа: нетривиальный связный граф G является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждое его ребро e принадлежит нечетному количеству циклов в G.

9 (1,5 балла)

Доказать, что для шахматной доски размерами 3×6 невозможно конем обойти все клетки доски, проходя каждую клетку лишь один раз и вернувшись в ту клетку, с которой начался обход.

Дополнительная часть

10 **(5 баллов)**

Построить рекуррентное соотношение для подсчета количества a_n гамильтоновых циклов в n-мерном октаэдре – полном n-дольном графе $K_{2,2,\dots,2}$, в каждой доле которого содержится ровно 2 вершины, смежные со всеми вершинами других долей.

Принимаются частичные решения:
1 балл можно получить за любой алгоритм, вычисляющий a_n за время $\Theta(n^2)$.
2.5 балла можно получить за любой алгоритм, вычисляющий a_n за время $\Theta(n)$.
3.5 балла можно получить за систему из двух рекуррентных соотношений.

11 **(3 балла)**

Доказать, что в случае шахматной доски размерами $4 \times n$ (рис.1) невозможно конем обойти все клетки доски, проходя каждую клетку лишь один раз и вернувшись в ту клетку, с которой начался обход.

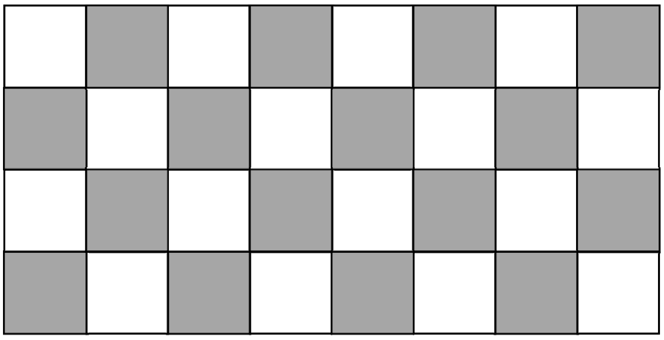

Рис. 1

12 **(2,5 балла)**

Граф Петерсена относится к семейству так называемых сильно регулярных графов, то есть d-регулярных графов, у которых любая пара смежных вершин имеет одинаковое количество l общих соседей (в графе Петерсена $l = 0$), а также любая пара несмежных вершин имеет одинаковое количество m общих соседей (в графе Петерсена $m = 1$). Доказать, что матрица M_a смежности произвольного сильно регулярного графа удовлетворяет матричному уравнению вида

$$M_a^2 = (l - m) \cdot M_a + (d - m) \cdot E + m \cdot I, \qquad (1)$$

дав комбинаторную интерпретацию этого равенства. Используя это равенство, определить собственные числа сильно регулярного графа G. Из условия $\mathrm{tr}(M_a(G)) = 0$ подсчитать кратность собственных чисел G. Как частный случай, получить отсюда спектр графа Петерсена, а также найти количество остовных деревьев в нем.