Домашнее задание 3. Перечислительная комбинаторика и числа Стирлинга второго рода.

Группа 102/3

Количество баллов на зачёт: 9

1. (1 балл) Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую четность?

2. (1 балл) Ребенок раскладывает в ряд карточки с пятью буквами А, двумя буквами Е, двумя буквами М, двумя буквами П, двумя буквами Т, двумя буквами Р, одной буквой Г и одной буквой Л. Сколько у него имеется вариантов получить слово ТЕЛЕГРАММААППАРАТ?

3. (1 балл) Восемь студентов выбирают себе спецкурсы на семестр из списка, состоящего из четырех спецкурсов. Сколькими способами студенты могут записаться на эти спецкурсы так, чтобы каждый студент записался хотя бы на один спецкурс?

4. (1 балл) Сколько существует булевых функций n аргументов?

5. (2 балла) Говорят, что булева функция $f(x_1, ..., x_n)$ зависит от своего аргумента x_i, если можно подобрать такие значения $\{b_j\}$ для других аргументов, что
$$f(b_1, ..., b_{i-1}, 0, b_{i+1}, ..., b_n) \neq f(b_1, ..., b_{i-1}, 1, b_{i+1}, ..., b_n).$$
Сколько булевых функций зависят от всех своих n аргументов?

6. (1 балл) Сколькими способами можно из 60 различных грибов сделать четыре неразличимые связки по пятнадцать грибов в каждой?

7. (1 балл) Доказать комбинаторно следующую формулу для чисел Стирлинга $S(n, 3)$:
$$S(n, 3) = \frac{3^n - 3(2^n - 2) - 3}{6}.$$

8. (1,5 балла) Доказать, что числа Стирлинга $S(n, n-2)$ рассчитываются по формуле
$$S(n, n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24}.$$

9. (1,5 балла) Придумать комбинаторное доказательство формулы
$$k^n = \sum_{i=0}^{n} (k)_i \cdot S(n, i).$$

10. (1,5 балла) Обозначим через $F(n)$ количество разбиений n-множества без блоков единичной длины. Доказать, что
$$B(n) = F(n) + F(n+1).$$