Докажите, что последовательность $x_n = sin(n^2)$ не имеет предела.

Доказательство. Предположим противное, пусть существует такое число a, что $\sin(n^2) \to a$. Обозначим через b_1 и b_2 точки на окружности T длины 2π, такие что $\sin(b_1) = \sin(b_2) = a$. Обозначим через y_n точки на T такие, что $y_n - n^2$ кратно 2π. Поскольку $\sin(n^2) \to a$, то множество частичных пределов y_n состоит из не более, чем двух точек b_1 и b_2. Теперь рассмотрим последовательность точек на окружности z_n, определяемых равенством $z_n = y_{n+1} - y_n$. Заметим, что множество частичных пределов z_n состоит из не более 4 точек вида $\pm b_1 \pm b_2$ (поскольку y_n имеет не более 2-ух частичных пределов).

Сейчас мы придем к противоречию. Последовательность n плотна "по модулю 2π"в T. Поэтому последовательность $2n+1$ тоже плотна "по модулю 2π"в T . Но это означает, что $z_n = (n+1)^2 - n^2$ плотна в T. У плотной последовательности в T бесконечно много частичных пределов, а мы доказали, что не больше 4-ёх. Противоречие.