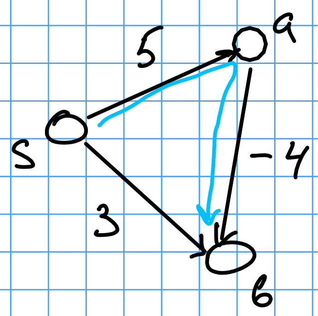
Кратчайшие пути в графах с отрицательными рёбрами.

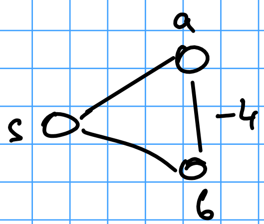


dist

a	b
5	3

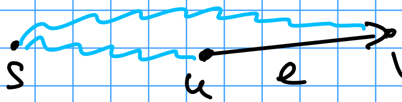
NB: Алгоритм Дейкстры – вычисляет кратчайшие пути от одной вершины до всех оставшихся.

Утв 1: Если в неор. графе есть ребро отриц. веса $\Rightarrow$ кратчайшие пути не опр.



Утв 2: Если в ор. графе есть цикл отриц. веса $\Rightarrow$ кратчайшие пути не определены.

Операция релаксации ребра.



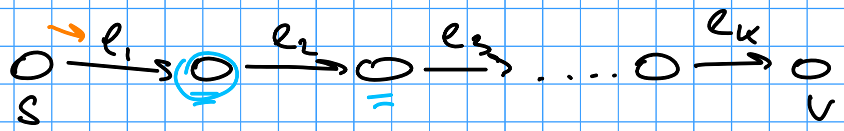
, вес $w(e)$

$\equiv$ $dist[v] = \min(dist[v],\ \underline{dist[u]} + w(e))$ $\equiv$

Утв 1: $\underline{dist[v]} \geq dist(s, v)$ (безопасность, корректность)

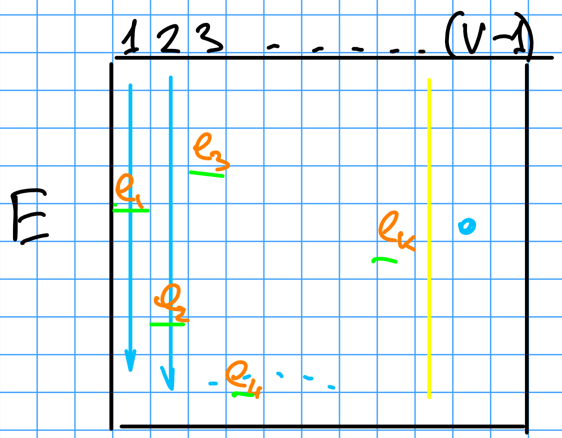
Утв 2: Пусть $s \to v_1 \ldots v_k \to v$ – кратчайший путь от s до v.
Если $dist[v_k]$ – оптимальный $\Rightarrow$ после релаксации $(\underline{v_k}, v)$ – $dist[v]$ – оптимальн.

Утв 3: Пусть $e_1 \dots e_k$ – это рёбра кратчайшего пути от s до v



Если последовательно прорелакс. все рёбра $e_1 \dots e_k$, то мы вычислим кратчайший путь до v.

Идея: давайте $V-1$ раз сделаем релаксацию всех рёбер



$V-1$ – max длина пути

Утв: Если на какой-то итерации релакс. не улучшились $\Rightarrow$ достигнут оптимум.

```
Bellman-Ford (s):
  for v ∈ V:
     dist [v] = ∞
     prev [v] = 0
  dist [s] = 0
  for i = 1 to V-1
     for (u, v) ∈ E:
        if dist[v] > dist[u] + w(u,v):
           dist [v] = dist[u] + w(u,v)
           prev [v] = u
```

$O(VE)$

- $E \sim V^2$

  $O(V^3)$

Утв: Работает и в случае отриц. рёбер

Проверка отрицательного цикла.

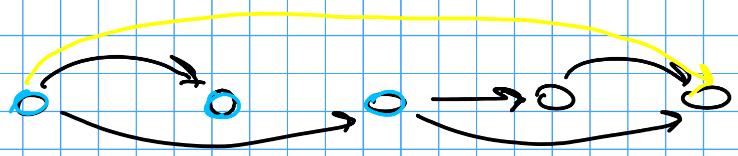
Утв: Если сделать V итераций в алг. Форда - Беллмана и на V-ой итерации какое-то расстояние уменьшится $\Leftrightarrow$ в графе есть отрицательный цикл.

▷ $\Rightarrow$ Если расст. уменьш. $\Rightarrow$ есть отриц. цикл.

$\Leftarrow$ Если есть отриц. цикл $\Rightarrow$ на всех будут происх. уменьшения расст., в т.ч. и на итерации V. ◁

Кратчайшие пути в ацикличных графах.

Утв: Все рёбра на (кратчайшем) пути в ацикличном графе лежат в порядке топологической сортировки.



1. Сделать топологическую сортировку.
2. Прорелаксировать все исходящие рёбра у вершин в порядке топ. сортировки

$$O(V+E)$$