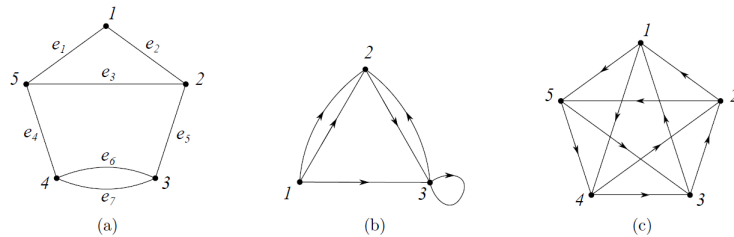


28 сентября 2017

- Доказать, что в любом простом графе, построенном на $n > 2$ вершинах, существуют по крайней мере две вершины с одинаковыми степенями. Остается ли верным это утверждение для мультиграфа? Для графа без петель?
- Докажите, что кубический граф, т. е. граф, степени всех вершин которого равны трем, всегда имеет четное число вершин.
- Подсчитайте количество ребер в полном двудольном графе $K_{m,n}$ на $|V(K_{m,n})| = n + m$ вершинах. Что можно сказать о параметрах m и n в случае, если $K_{m,n}$ является k -регулярным?
- Пусть G — простой граф, построенный на 9 вершинах. Предположим, что сумма степеней вершин графа G больше или равна 27. Правда ли, что в таком графе обязательно существует вершина, степень которой больше или равна 4?
- Рассмотрим произвольную смежную пару вершин $\{x, y\}$ в простом графе G на n вершинах. Докажите, что ребро $e = \{x, y\}$ принадлежит по меньшей мере $\deg(x) + \deg(y) - n$ треугольникам в графе G .
- Докажите, что граф Q_k (т. е. k -куб) действительно является k -регулярным двудольным графом. Подсчитайте количество вершин и ребер в таком графе. Сколько различных копий P_3 и C_4 содержит такой граф?



- Запишите матрицу смежности M_a и матрицу инцидентности M_i для графа G , изображенного на рисунке (a).
- Запишите матрицу смежности M_a ориентированного графа G , изображенного на рисунке (b).
- Запишите список смежности для турнира, показанного на рисунке (c).
- Пусть M_a и M_i — матрицы смежности и инцидентности простого графа G . Чему равны диагональные коэффициенты матриц M_a^2 и $M_i M_i^t$, где M_i^t — транспонированная к M_i матрица? Как связаны недиагональные элементы матриц $M_i M_i^t$ и M_a ?
- Пусть в графе G ровно две вершины имеют нечетную степень. Доказать, что эти вершины являются связанными.
- Пусть G есть регулярный простой связный граф, имеющий 22 ребра. Сколько вершин может содержать данный граф?
- Доказать, что любой маршрут, соединяющий вершины x и y , содержит простой путь, соединяющий те же самые вершины.
- Доказать, что простой граф G , минимальная степень $\delta(G)$ которого больше или равна $n/2$, является связным. Показать, что эта оценка точная, предъявив несвязный граф с $\delta(G) = n/2 - 1$.
- Доказать, что дополнение несвязного графа является связным.
- Доказать, что в любом графе G расстояние $d(x, y)$ между вершинами удовлетворяет неравенству треугольника $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.