Коммуникационная сложность II + колмогоровская сложность.

25 апреля 2017 г.

1. Докажите, что для любой булевой функции f и любого распределения μ существует протокол Π для R_f: $IC_{\mu}^{int}(\Pi) \leq 2\log n$.

   Подсказка: Протокол следующий: Алиса передает 1-ый бит, Боб его сравнивает со своим первым битом, завершают если биты различны продолжают, если биты были одинаковы переходя ко второму биту. Распишите внуьреннюю информацию с помощью определения и дополнительного события i номер самого первого бита где строки Алисы и Боба различаются. Возможно Вам поможет док-во теоремы 6.4 из конспекта.

2. Будем называть *универсальным отношением* для строк длины n отношение $U_n = \{(x, y, i) \mid x, y \in \{0,1\}^n, x_i \neq y_i\}$ (это обобщение понятия отношения Карчмера-Вигдерсона). Будем называть *расширенным универсальным отношением* для строк длины n отношение $U'_n = U_n \cup \{(x, x, \perp) \mid x \in \{0,1\}^n\}$ (решая коммуникационную задачу для расширенного универсального отношения Алиса и Боб могут получить *одинаковые* строки и тогда они должны ответить $\perp$).

   Докажите следующие утверждения:

   (a) $4 \cdot L(U_n) \geq L(U'_n) \geq L(U_n)$.

   (b) $L(U'_n) \geq 2^n$.

   Подсказка для b: Постройте такое распределение μ, что $IC_{\mu}(\Pi) \geq n$. $IC_{\mu}(\Pi)$ распишите по определению и покажите, что протокол Π однозначно определяет x.

3. Пусть $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ некоторая булева функция. Определим функцию $(\vee_m \circ f) : \{0,1\}^{m \times n} \to \{0,1\}$ следующим образом:

$$(\vee_m \circ f)(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_1) \vee f(x_2) \vee \ldots \vee f(x_m),$$

где $x_i \in \{0,1\}^n$ (т.е. мы определили композицию функция $\vee_m$ и f). Докажите, что $L(\vee_m \circ f) = m \cdot L(f)$. Докажите, любым способом не обязательно через внутреннюю внешнюю информацию.

4. Докажите, что $D(MED) = O(\log n)$.

   Подсказка: Решить за $O(log^2 n)$ можно если передавать на каждом шаге медиану друг другу. Поймите, что можно сэкономить на передаче, если передавать медиану побитово начиная со старших разрядов.

5. Докажите, что следующее утверждение неверно

$$\exists c\ \forall x, y\ K(x,y) \leq K(x) + K(y \mid x) + c.$$

   Подсказка: Посчитайте количество пар (x,y) если $|x| + |y| = n$.

6. Если функция KS' перечислима сверху и $|\{x | KS'(x) < n\}| \leq 2^n$ при всех n, то найдется такое c, что $KS(x) < KS'(x) + c$ для всех x.