Определители

На занятии мы обсудили понятие и конструкцию определителя, как функции от набора векторов пространства. А именно, мы стартовали с понятия объёма параллелепипеда в n-мерном пространстве и показали, что есть некий ряд аксиом, которым это понятие должно удовлетворять. Эти аксиомы имеют смысл над любым полем и даже однозначно задают некоторый объект.

Определение 1. Отображение $\mu\colon V^n \to K$ называется полилинейным, если для любого $1 \le i \le n$

$$\mu(v_1, \dots, v_i + \lambda u_i, \dots, v_n) = \mu(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \lambda\mu(v_1, \dots, u_i, \dots, v_n).$$

Определение 2. Полилинейное отображение $\mu\colon V^n \to K$ называется антисимметричным или кососимметриеским, если

$$\mu(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_n) = 0.$$

Мы обсудили, что условие антисимметричности можно заменить на следующее естественное условие

$$\mu(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\mu(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

над полем характеристики $k \neq 2$. Дадим похожее не менее важное определение, которое пока нам не понадобится.

Определение 3. Полилинейное отображение $\mu\colon V^n \to K$ называется симметричным, если

$$\mu(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = \mu(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

Все полилинейные отображения называются ещё полилинейными формами. Перейдем теперь к понятию формы объема.

Определение 4. Пусть $n = \dim V$. Ненулевая антисимметричная форма $\mu\colon V^n \to K$ называется формой объёма.

Определение 5. Пусть $V = K^n$. Определителем $\det$ называется форма объёма на V, такая что $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$, где e_i — стандартный базис.

Пространство $(K^n)^n$ естественно отождествляется с множеством матриц $M_n(K)$, поэтому можно считать, что определитель задан на множестве всех матриц, и его образ $\det(E) = 1$.

Подводя итоги видно, что по определению отображение $\det$ должно удовлетворять условиям
0) $\det(E) = 1$
1) $\det(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$
2) $\det(\dots, \lambda v, \dots) = \lambda \det(\dots, v, \dots)$
3) $\det(\dots, v + u, \dots) = \det(\dots, v, \dots) + \det(\dots, u, \dots)$

С другой стороны отображение типа объёма естественно удовлетворяет другим свойствам...
0) $\mathrm{vol}(E) = 1$
1$'$) $\mathrm{vol}(\dots, v, \dots, u, \dots) = \mathrm{vol}(\dots, v, \dots, u + \lambda v, \dots)$
2) $\mathrm{vol}(\dots, \lambda v, \dots) = \lambda \det(\dots, v, \dots)$
В принципе геометрически можно понять и свойство 3 (для векторов, чьи проекции на подходящую ось сонаправлены)
3) $\mathrm{vol}(\dots, v + u, \dots) = \mathrm{vol}(\dots, v, \dots) + \mathrm{vol}(\dots, u, \dots)$

Видно, что хотя мы желаем совпадения понятия определителя и понятия объёма параллелепипеда, набор тождеств (которые на самом деле их и определяют) несколько отличается. Для практических целей стоит получить свойство 1$'$) для $\det$. Это просто. Раскроем в выражении $\det(\dots, v, \dots, u + \lambda v, \dots)$ скобки и вынесем λ (по свойствам 2) и 3)). Ненужное слагаемое равно 0 по свойству 1).

На самом деле тождеств 0) 1$'$) 2) тоже достаточно, потому что они позволяют работать с помощью метода Гаусса для столбцов (и говорят, что если есть нулевой столбец, то определитель обнуляется).

Теорема 1. *Форма объема на V существует и единственна с точностью до множителя из k. В частности определитель однозначно определён и на матрице A задаётся формулой*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} \prod_{1 \le i \le n} a_{i\sigma(i)}.$$

Доказательство. Формула для определителя очевидно удовлетворяет нужным аксиомам. Единственность следует из того, что метод Гаусса однозначно позволяет посчитать определитель

С вычислительной точки зрения эта формула бесполезна, но она даёт некоторые важные следствия. Например, то, что определитель есть многочлен степени n с целыми коэффициентами от элементов матрицы (следовательно, понятие определителя можно ввести над любым коммутативным кольцом).

Ещё одно следствие можно получить из этой теоремы: определитель не меняется при элементарном преобразовании для строк 1 типа. Надо определить отображение $\det_{new}(A) = \det(CA)$, где C — матрица элементарного преобразования. Это отображение удовлетворяет всем свойствам по столбцам и следовательно совпадает с исходным. Аналогично можно разобраться с преобразованиями остальных типов.

Следовательно можно использовать преобразования строк, а не столбцов (что мы с успехом и делали на паре).

Выпишем несколько свойств определителей:

Факт. 1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
2) $\det(A) = \det(A^T)$
3) $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C\end{pmatrix} = \det(A)\det()$
4) Определитель верхнетреугольной или нижнетреугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.
5) При смене строк местами знак определителя меняется.

Было сформулировано несколько фактов касательно многочленов от нескольких переменных, которые помогают при угадывании (вычислении) определителей (ведь определитель — многочлен).

Факт. Пусть K поле. Тогда любой элемент $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ $f \neq 0$ однозначно раскладывается на неприводимые множители с точность до обратимых элементов поля K.

Следующий факт был сформулирован неверно на паре. Найдите два отличия.

Факт. Пусть K алгебраически замкнутое поле. Тогда если $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$, f неприводим, и из того, что $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$ следует, что $g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$, то f делит g.

Последнее, что мы обсудили было разложение матрицы по строке или столбцу.

Факт. При разложении по j-ому столбцу формула даёт $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$, где A^{ij} матрица A без j-ого столбца и i-ой строки.

А ещё мы обсудили, что бывает гомоморфизм групп из $S_n \to GL_n(K)$, образ которого состоит из матриц у которых в любом столбце и в любой строке по одной единице.

А еще мы поняли, что два базиса $v_1, \dots, v_n$ $u_1, \dots, u_n$ в $\mathbb{R}^n$ могут быть непрерывно продеформированы внутри пространства всех базисов тогда и только тогда, когда соответствующие определители имеют одинаковый знак (надо было разложить всё на элементарные преобразования и разобраться с ними по отдельности).

Когда у нас есть произвольное пространство V над $\mathbb{R}^n$, то все базисы в нём тоже разбиваются на две кучки. Однако какую из них выбрать неясно. Выбор одной из этих кучек (классов эквивалентности базисов) называется заданием ориентации на пространстве V над $\mathbb{R}$.

Задачи

Задача 1. Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & c_4 & 0 & 0 & 0 \\ c_5 & c_6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Иногда можно придумать трюк для вычисления определителя

Задача 2. Рассмотрим две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}, \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножьте их и найдите их определители.

Задача 3. Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & y & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}$$

Задача 4. Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Задача 5. Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

где ε — первообразный корень степени n из единицы.

Задача 6. (2 балла) Покажите, что если матрицы A и B коммутируют, то

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(DA - CB).$$

Найдите пример, когда при отсутствии коммутативности указанное равенство неверно.

Задача 7. Рассмотрим множество матриц в $M_2(\mathbb{C})$ вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

а) Покажите, что это подкольцо в $M_2(\mathbb{C})$, которое является подалгеброй над $\mathbb{R}$ в $M_2(\mathbb{C})$. Вычислите определитель такой матрицы. Покажите, что для любого коммутативного кольца R множество вида $\{a^2+b^2+c^2+d^2 \mid a,b,c,d \in R\}$ замкнуто относительно умножения (хотя бы для $\mathbb{Z}$).
б) Покажите, что относительно естественного умножения на элементы $\mathbb{C}$ это кольцо не является $\mathbb{C}$ алгеброй.

Это кольцо называется алгеброй кватернионов (над $\mathbb{R}$).

Определитель часто используется как инструмент для введения инвариантов чего-нибудь. Например, линейных операторов.

Задача 8. Пусть $A\colon V \to V$ некоторый оператор. Определим многочлен $\chi_A(t) = \det(B - t\cdot E)$, где B матрица оператора A в каком-то базисе. Покажите, что это определение не зависит от выбора базиса. Посчитайте, чему равен коэффициент при степени $n-1$ у этого многочлена.

Задача 9. Пусть K некоторое поле, а алгебра $L = K[x]/p(x)$, где $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Рассмотрим класс $\overline{x} \in L$. Определим отображение $L \to L$ по правилу $\alpha \to (\overline{x}^2 + \overline{x})\alpha$. Найдите определитель этого оператора.

Определение 6. Определим группу $SL(V)$, как множество тех операторов $L\colon V \to V$, что $\det(L) = 1$. В случае $K = \mathbb{R}$ группу $SL(V)$ можно интерпретировать как линейные операторы, сохраняющие понятие объёма и ориентацию пространства.

Задача 10. Покажите, что все алгебры размерности 2 над полем коммутативны.

Необязательные задачи

Задача 11. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$. Симплексом с вершинами $v_0, v_1, \ldots, v_n$ назовём множество

$$\Delta^n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} x_i v_i \,\middle|\, \sum x_i = 1,\ \ 0 \le x_i \le 1 \right\}$$

а) Выразите через определитель объём симплекса $0, v_1, \ldots, v_n$.
б) Аналогичный вопрос, когда v_0 произвольное.