

# Представление лямбда-термов через номинальные множества на языке vclang

Дмитрий Халанский

21 февраля 2018 г.

# Номинальные множества

```
{                               {
    int a = 5;                   int c = 5;
    int b = 6;                   int d = 6;
    printf("%d", a + b);         printf("%d", c + d);
}
```

При формальной верификации программ можно с пользой учитывать  $\alpha$ -эквивалентность, чтобы, к примеру, производить индукцию по структуре без сохранения бесполезных сведений об именах.

Для формализации равенства с точностью до переименовывания переменных можно использовать номинальные множества.

## vclang и номинальные множества

Разные языки с зависимыми типами имеют библиотеки для номинального анализа:

- ▶ *Nominal Reasoning Techniques in Coq* (Coq) — задаёт номинальные множества аксиомами;
- ▶ *Cosa.Nominal* (Coq) — требует функциональную экстенциональность;
- ▶ <http://www.cl.cam.ac.uk/~amp12/agda/choudhury/html/> (Agda) — у библиотеки очень сложный интерфейс;
- ▶ *Nominal* (Isabelle) — язык Isabelle слабо распространён.

vclang — язык с зависимыми типами, построенный на гомотопической теории типов. Он позволяет легко задавать фактор-множества. Может, на нём выйдет просто и без введения аксиом?

# Цели и задачи

Цель — формализовать частный случай номинальных множеств — лямбда-термы — на vclang.

Задачи:

- ▶ Выбрать вид реализации лямбда-термов через номинальные множества;
- ▶ Определить лямбда-термы;
- ▶ Доказать корректность определения;
- ▶ Проанализировать результаты.

## Вид определения лямбда-термов

С заданием предтермов и определением термов как фактор-множества по ним:

1. Определить альфа-эквивалентность и взять фактор-множество по ней;

С индукцией-рекурсией в определении термов:

2. Честно формализовать номинальные множества и использовать их в определении лямбда-термов;
3. Задать через индукцию-рекурсию равенство альфа-эквивалентных термов прямо в определении;
4. Вообще не определять альфа-эквивалентность на лямбда-термах, а взять тот критерий равенства, который не выполняется “из коробки” — равенство на лямбда-абстракциях — и вшить его прямо в тип .

## Вид определения лямбда-термов

С заданием предтермов и определением термов как фактор-множества по ним:

1. Определить альфа-эквивалентность и взять фактор-множество по ней: **есть на что опираться: примеры в книге;**

С индукцией-рекурсией в определении термов:

2. Честно формализовать номинальные множества и использовать их в определении лямбда-термов: **видимо, быстрее получить результат на частных случаях;**
3. Задать через индукцию-рекурсию равенство альфа-эквивалентных термов прямо в определении: **последний вариант кажется более элегантным;**
4. Вообще не определять альфа-эквивалентность на лямбда-термах, а взять тот критерий равенства, который не выполняется “из коробки” — равенство на лямбда-абстракциях — и вшить его прямо в тип : **решили, что так наиболее быстро.**

# Определение лямбда-термов

Предтерм — это  $v$ ,  $a b$  или  $\lambda v.b$ .

Альфа-эквивалентность — просто отношение между термами. Тогда термы — это предтермы с дополнительным правилом равенства:  $a = b$  при условии, что  $a =_{\alpha} b$ .

Лямбда-терм — это данные  $v$ ,  $a b$ ,  $\lambda v.b$  с дополнительным правилом равенства на них:  $\lambda v.b$  и  $\lambda v'.b'$  при условии, что  $b = b'$ , если в  $b$  заменить  $v$ , а в  $b'$  заменить  $v'$  на одну и ту же переменную.

# Доказательство свойств

Нужно доказать, что  $\alpha$ -эквивалентность является отношением эквивалентности.

Прямо в определении лямбда-термов нужно предоставить доказательство, что определение равенства на термах корректно.

# Доказательство свойств

Нужно доказать, что  $\alpha$ -эквивалентность является отношением эквивалентности.

Получилось!

Прямо в определении лямбда-термов нужно предоставить доказательство, что определение равенства на термах корректно.

Не получилось!

# Результаты

- + Удалось формализовать одно из представлений лямбда-термов с точностью до альфа-эквивалентности;
- Не удалось доказать что-то про лямбда-термы на этом представлении;
- Не удалось формализовать второе представление;
- + Удалось доказать, что альфа-эквивалентность лямбда-термов — отношение эквивалентности (*математики могут спать спокойно*).