ДЗ на 20 ноября

1) Докажите формулу $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \bigotimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/(m,n)\mathbb{Z}$ (если потребуется, можете пользоваться тем же универсальным свойством, что и для векторных пространств)

2) Докажите, что в тензорном произведении двух векторных пространств $a \otimes b = c \otimes d \neq 0$ тогда и только тогда, когда $a = \lambda c, b = \lambda d$ для некоторого скаляра.

3) Пусть $A_1 : U_1 \to V_1$, $A_2 : U_2 \to V_2$ — линейные отображения. Зададим линейное отображение $A_1 \otimes A_2 : U_1 \bigotimes U_2 \to V_1 \bigotimes V_2$ покомпонентно на разложимых тензорах. Проверьте, что это определение корректно и $ker(A_1 \otimes A_2) = ker(A_1) \bigotimes U_2 + U_1 \bigotimes ker(A_2)$

4) Докажите, что ранг тензора в тензорной степени пространства $U < V$ такой же, как если его рассматривать в объемлющем пространстве V.

5) Пусть u, v — базис некоторого пространства над $\mathbb{R}$. Докажите, что тензор $u \otimes u \otimes u - v \otimes v \otimes u + u \otimes v \otimes v + v \otimes u \otimes v$ представим в виде суммы двух разложимых, если перейти к комплексификации, а в исходном пространстве это не так.