

Коммуникационные игры на графах

Пётр Смирнов, Академический Университет

Научный руководитель: Д. О. Соколов

1 марта 2017 года

Пропозициональные доказательства

- Система доказательств для языка L — полиномиальный алгоритм $V(x, w)$ такой, что:
 - $V(x, w) = 1 \Rightarrow x \in L$ (корректность)
 - $\forall x \in L \exists w: V(x, w) = 1$ (полнота)
- Система доказательств полиномиально ограничена, если для любого x из L существует «короткое» доказательство, то есть
$$\forall x \in L \exists w: V(x, w) = 1, |w| < p(|x|)$$
для некоторого фиксированного многочлена p

[Cook-Reckhow, 1979]

Системы доказательств для UNSAT

- Таблица истинности
- Дерево решений
- Древовидная резолюционная
- Резолюционная
- ...

Правило резолюции:

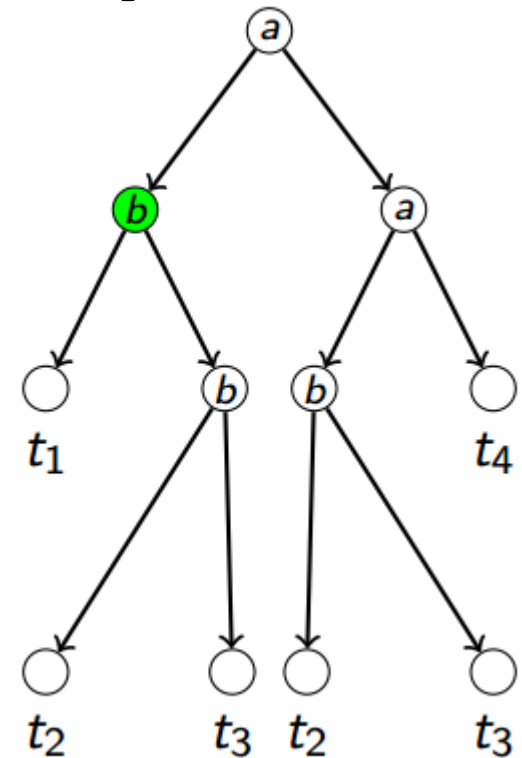
$$\frac{x \vee a_1 \vee \dots \vee a_n, \quad \neg x \vee b_1 \vee \dots \vee b_m}{a_1 \vee \dots \vee a_n \vee b_1 \vee \dots \vee b_m}$$

Мотивация изучения

- «Лог» алгоритма, решающего SAT – доказательство невыполнимости формулы
- Алгоритмы расщепления (DPLL) эквивалентны древовидным резолюционным доказательствам
- Существование полиномиальной системы доказательств для UNSAT равносильно вопросу $NP = coNP$
- Программа Кука: для всё более сильных систем доказательств доказывать нижние оценки

Коммуникационные задачи

- Коммуникационная задача [Yao, 1979]:
Фиксирована функция $f(x, y)$.
Алисе известен только x ,
Бобу — только y .
Цель: вычислить значение $f(x, y)$,
минимизируя количество
переданных друг другу бит.
- Для некоторых функций f
известны нижние оценки

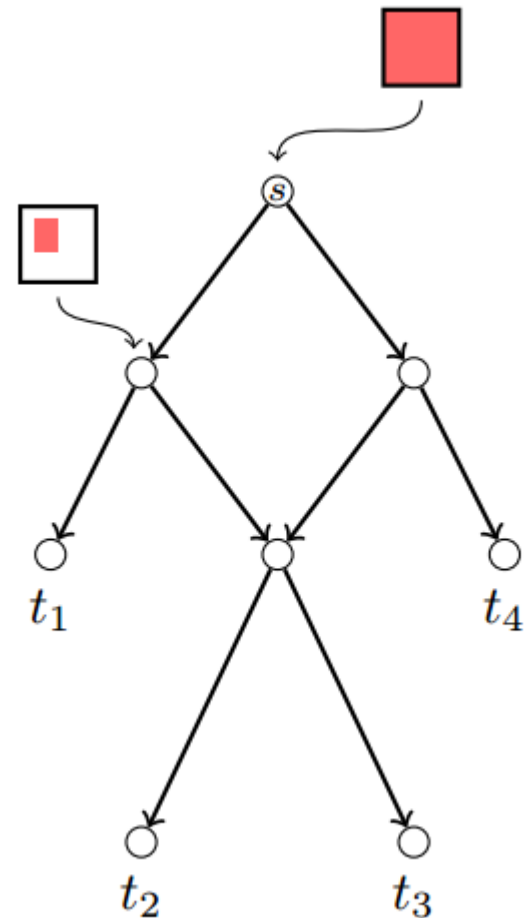
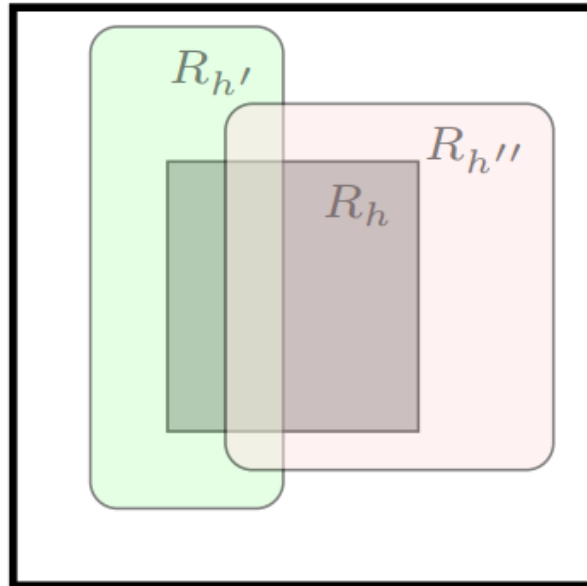


Коммуникационные задачи

- Задача Search_φ — коммуникационная задача, в которой $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ — невыполнимая формула в КНФ, Алиса знает значения всех x_i , Боб — y_i .
Цель: найти номер невыполненного дизъюнкта.
- Известны сведения нижних оценок для древовидных систем доказательств
[Impagliazzo-Pitassi-Urquhart, 1994
Beame et al., 2008
Nordström-Huynh, 2012
Goos-Pitassi, 2014]

DAG-like коммуникационные протоколы

- DAG-like протоколы для коммуникационных задач [Разборов, 1995]



DAG-like коммуникационные протоколы

- Для таких игр известны некоторые сведения DAG-like систем доказательств
- Интересны нижние оценки на DAG-like протоколы

Верхняя оценка для цейтинских формул

- Цейтинские формулы
- Классический «трудный» пример для систем доказательств
- Но нетрудный для DAG-like игры:
- **Теорема:** существует DAG-like протокол размера $O(n)$ для задачи Search_φ , где φ — цейтинская формула (каждое ребро — кратности 2, у Алисы и Боба по одной копии)
- Конструктивное доказательство
- Оценка была известна и ранее, но доказательство было трудоёмким

Нижняя оценка для DISJ

- Задача DISJ (Set Disjointness)
- Известна оценка $2^{\Theta(n)}$ для классических игр, в том числе рандомизированных
- Одно из доказательств: Bar-Yossef et al. (2002), новый подход: оценка через информационную сложность и декомпозиция на «примитивные» функции
- **Теорема:** любой DAG-like протокол для DISJ имеет размер $\Omega(2^{n/4})$

Планы

- Получение нижней оценки на вероятностные DAG-like протоколы для DISJ
- Используя вероятностные сведения, получить нижнюю оценку на систему доказательств $\text{Res}(\oplus)$ ($\text{Res} < \text{Res}(\oplus) < \text{AC}^0[2]\text{-Frege}$)
- Оценки для квадратичных цейтинских формул для случая произвольного графа

Спасибо за внимание