Список вопросов к экзамену по математическому анализу
АУ, третий семестр, осень 2017 года

Глава VIII. Функции нескольких переменных

1. ! Локальные экстремумы. Определение и необходимое условие экстремума. Стационарные точки.

2. Квадратичная форма. Положительная и отрицательная определенность. Оценка снизу положительно определенной квадратичной формы. Достаточные условия экстремума.

3. Обратные отображения. Оценка на норму обратного отображения. Теорема об обратимости отображений, близких к обратимым.

4. Теорема об обратной функции. Выбор окрестности. Шаги 1–2 (инъективность и открытость образа).

5. Теорема об обратной функции. Выбор окрестности. Шаги 3–4 (дифференцируемость и непрерывная дифференцируемость обратной функции). Следствие об открытости отображения.

6. Теорема о неявной функции.

7. ! Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

8. Наибольшее и наименьшее значения квадратичной формы на сфере. Формула для нормы матриц.

9. Расстояние от точки до гиперплоскости.

Глава IX. Мера

10. Алгебра и σ-алгебра множеств. Определение, свойства, примеры. Теорема о существовании минимальной σ-алгебры содержащей данное семейство множеств. Борелевская оболочка и борелевские множества.

11. Лемма про дизъюнктное объединение множеств. Кольцо и полукольцо. Теорема о свойствах элементов полукольца.

12. Произведение полуколец. Параллелепипеды и ячейки. Связь между ними.

13. ! Полукольца ячеек. Представление открытого множества в виде объединения ячеек. Следствие.

14. Аддитивные функции множеств. Объем. Примеры. Свойства объема на полукольце.

15. Произведение объемов. Следствие для классического объема.

16. ! Мера: определение и примеры. Теорема о счетной полуаддитивности.

17. Две теоремы о том, когда конечно аддитивная функция является мерой.

18. Субмеры. Мера как сужение субмеры. Полная мера.

19. Внешняя мера. Теорема о продолжении меры с полукольца.

20. Теорема о внешней мере множества. Следствие о структуре измеримых множеств.

21. Монотонный класс. Теорема о единственности продолжения меры.

22. ! Счетная аддитивность классического объема. Определение меры Лебега. Свойства меры Лебега 1–6.

23. ! Свойства меры Лебега 7–14. Пример несчетного множества, имеющего нулевую меру. Пример неизмеримого множества.

24. Регулярность меры Лебега. Следствия.

25. ! Инвариантность меры Лебега относительно сдвига. Единственность такой меры. Инвариантность меры Лебега относительно движения.

Глава X. Интеграл Лебега

26. ! Измеримые функции: примеры, эквивалентные определения, свойства.

27. Измеримость $\inf f_n$, $\sup f_n$, $\underline{\lim}\, f_n$, $\overline{\lim}\, f_n$, $\lim f_n$. Измеримость функций $\varphi \circ f$.

28. Арифметические операции с измеримыми функциями. Измеримость непрерывной функции.

29. ! Простые функции. Свойства. Приближение неотрицательной измеримой функции простыми. Следствия.

30. ! Различные виды сходимости последовательности функций. Единственность (с точностью до множества меры 0) предельных функций.

31. Теорема Лебега о сходимостях. Примеры (существенность условий и необратимость утверждения).

32. Теорема Рисса. Следствие. Теоремы Егорова, Фреше и Лузина (без доказательства).

33. ! Интеграл от простой функции. Свойства. Определение интеграла Лебега. Элементарные свойства интеграла от неотрицательной функции (до теоремы Беппо Леви).

34. ! Теорема Беппо Леви.

35. Линейность и аддитивность интеграла, положительность интеграла. Пример.

36. Неравенство Чебышёва и свойства интеграла, связанные с понятием почти везде.

37. Суммируемые функции и свойства интеграла от суммируемых функций.

38. Интеграл от комплекснозначной функции. Счетная аддитивность интеграла от неотрицательной функции. Следствия.

39. Абсолютная непрерывность интеграла. Следствие. Плотность одной меры относительно другой. Интеграл по мере, имеющей плотность. Единственность плотности.

40. Неравенства Гёльдера и Минковского.

41. ! Следствия теоремы Беппо Леви. Лемма Фату. Усиленный вариант теоремы Беппо Леви.

42. ! Теорема Лебега о предельном переходе. Существенность условий.

43. Связь интегралов Римана и Лебега. Критерий Лебега интегрируемости по Риману (без доказательства).

44. ! Произведение мер. Определение и свойства.

45. Принцип Кавальери.

46. График и подграфик функции. Связь измеримости функции с измеримостью подграфика. Теорема о мере подграфика.

47. Теорема Тонелли.

48. Теорема Фубини. Следствие. Существенность суммируемости.

49. Теорема об интеграле от функции распределения.

50. Диффеоморфизм. Теорема об изменении меры множества при диффеоморфизме.

51. Теорема о замене переменной в интеграле Лебега. Частные случаи. Вычисление интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Глава XI. Интегралы с параметром

52. Интегралы от непрерывных функций. Непрерывность собственных интегралов с параметром.

53. ! Дифференцируемость собственных интегралов с параметром. Формула Лейбница.

54. Равномерная сходимость несобственных интегралов с параметром. Критерий Коши. Следствие. Примеры равномерно и неравномерно сходящихся интегралов.

55. ! Признак Вейерштрасса. Следствие. Пример.

56. Признак Дирихле. Интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$.

57. Признак Абеля.

58. ! Теорема о перестановке предела и интеграла. Существенность условий. Непрерывность равномерно сходящихся интегралов.

59. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру.

60. ! Г-функция Эйлера. Свойства.

61. В-функция Эйлера. Свойства. Связь с Г-функцией. Формула дополнения для Г-функции.

62. Формула Эйлера–Гаусса. Примеры сведения интегралов к Г-функции. Объем многомерного шара.

Глава XII. Криволинейные интегралы

63. ! Определение и свойства интеграла по длине дуги (равенства и неравенства).

64. ! Дифференциальная форма 1-го порядка. Определение и простейшие свойства интеграла от формы. Связь с интегралом по длине дуги.

65. ! Первообразная формы. Аналог формулы Ньютона–Лейбница. Необходимые и достаточные условия существования первообразной.

66. ! Формула Грина. Формулы для вычисления площади.

67. ! Замкнутые, точные и локально точные формы. Лемма Пуанкаре. Пример замкнутой формы, не имеющей первообразной.

68. Лемма Лебега. Первообразная формы вдоль пути.

69. Существование первообразной относительно отображения.

70. Гомотопные пути. Односвязные области. Интеграл от локально точной формы по гомотопным путям. Локальная точность и точность форм в односвязных областях.

Примечания

Студенты, успешно сдавшие коллоквиум, отвечают вопросы с доказательством лишь из второй части (вопросы 36–70). Сдача коллоквиума не освобождает от необходимости знать формулировки из обеих частей курса.

Особо важные вопросы помечены восклицательным знаком.

Незнание хотя бы одной из следующих определений и формулировок влечет оценку “неудовлетворительно”: определения дифференцируемости отображения, градиента, матрицы Якоби, производных по направлению, частных производных; экстремального свойства градиента; связи между дифференцируемостью и существованием частных производных; многомерной формулы Тейлора; теорем об обратной и неявной функции; определение точек экстремума и условного экстремума, а также методов их отыскания; определений полукольца, σ-алгебры, меры, конструкций стандартного продолжения меры, определений и важнейших свойств меры Лебега, измеримых функций, интеграла по мере, теоремы Леви, понятие “почти везде”, принципа Кавальери, теорем Тонелли и Фубини, формулы замены переменной в интеграле по мере Лебега; определение равномерной сходимости несобственного интеграла, определения и основных свойств Г-функции, определения криволинейных интегралов по длине дуги и от формы, определения первообразной от формы, формулы Грина, определения точной и замкнутой формы, гомотопных путей.