Криволинейные интегралы. Занятие 1. 14 февраля

Добрый день! Сегодня у нас занятие про криволинейные интегралы. Начнем с определений.

Криволинейный интеграл первого рода Пусть спрямляемая кривая кривая Γ задана уравнением

$$r = r(s),\ 0 \leq s \leq S, \tag{1}$$

где s — переменная длина дуги этой кривой. Тогда, если на кривой Γ определена функция F, то число $\int_0^S F(r(s))ds$ называют *криволинейным интегралом первого рода* от функции F по кривой Γ и обозначают $\int_\Gamma F(x;y;z)ds$. То есть

$$\int_\Gamma F(x;y;z)dx = \int_0^S F(x(s);y(s);z(s))ds.$$

Этот интеграл существует, если F непрерывна на Γ.

Если Γ — гладкая кривая, заданная уравнением на $[\alpha, \beta]$, а F непрерывна на Γ, выполняется

$$\int_\Gamma F(x;y;z)ds = \int_\alpha^\beta F(x(t);y(t);z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

А на плоскости

$$\int_\Gamma F(x;y)dx = \int_\alpha^\beta F(x;f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Криволинейный интеграл второго рода Пусть гладкая кривая Γ задана уравнением (1). Тогда в $\mathbb{R}^3$ выполняется

$$\frac{dr}{ds} = \tau = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$$

—единичный вектор касательной к этой кривой. Здесь α, β, γ — углы, образованные касательной с координатными осями. Пусть на кривой Γ определена вектор-функция $F = (P;Q;R)$ такая, что для скалярной функции

$$F_\tau = (F, \tau) = P\cos\alpha + Q\cos\beta + P\cos\gamma$$

существует $\int_\Gamma F_\tau ds$. Тогда число $\int_\Gamma (F,\tau)ds$ называют *криволинейным интегралом второго рода* от функции F по кривой Γ и обозначают

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_0^S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds;$$

последнее равенство выполняется по определению.

Формула Грина. Пусть граница Γ плоской ограниченной области G состоит из конечного числа гладких кривых. Тогда, если функции P, Q, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ непрерывны на $\overline{G}$, то

$$\int\int_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_\Gamma Pdx + Qdy,$$

где контур Γ ориентирован так, что G слева. Если положить $Q = x$, $Q = -y$, формула Грина позволяет считать площадь G:

$$S = \frac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx.$$

1. Вычислите криволинейный интеграл первого рода $\int_\Gamma (x+y)ds$, где Γ — граница треугольника с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.
2. Вычислите криволинейный интеграл первого рода $\int_\Gamma \frac{ds}{y-x}$, где Γ — отрезок с концами $(0;-2)$ и $(4;0)$.
3. Вычислите с помощью формулы Грина криволинейный интеграл второго рода $\int x^2ydx - xy^2dy$.
4. Вычислите криволинейный интеграл второго рода $\int_\Gamma \frac{y}{x}\,dx + dy$, где Γ — дуга кривой $y = \ln x$, $x \in [1;e]$, в направлении возрастания x.
5. Вычислите криволинейный интеграл второго рода $\int_\Gamma (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$, где Γ — часть ломаной $y = 1 - |x-1|$, $x \in [0;2]$, в направлении возрастания x.
6. Вычислите криволинейный интеграл второго рода $\int_\Gamma \frac{x}{y}\,dx - \frac{y-x}{x}\,dy$, где Γ — дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(2;4)$ до $B(1;1)$.

7. Вычислите криволинейный интеграл первого рода $\int_\Gamma xy\,ds$, где Γ — граница прямоугольника с вершинами $(0;0), (4;0), (4;2), (0;2)$.

8. Вычислите криволинейный интеграл первого рода $\int_\Gamma x^2\,ds$, где Γ — дуга окружности $x^2+y^2=a^2, y \geqslant 0$.

9. Вычислите криволинейный интеграл второго рода $\int_\Gamma xy^2\,dx$, где Γ — дуга кривой $x(t)=\cos t, y(t)=\sin t, t \in [0;\pi/2]$ в направлении возрастания t.

10. Вычислите криволинейный интеграл второго рода $\int_\Gamma \frac{x\,dy+y\,dx}{x^2+y^2}$, где Γ — окружность $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ (область слева).

11. Вычислите криволинейный интеграл второго рода $\int_\Gamma (2xy-y)\,dx+x^2\,dy$, где Γ — эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (область слева).