# Задачи по алгебраическим структурам (SE). 1

В решении задач 3 и 4 нужно пользоваться тем, что $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{Z}/n\ (a \in (\mathbb{Z}/n)^\times \Leftrightarrow \gcd(a,n) = 1)$ (этот факт следует из задачи 8).

(**2**) 1. Опишите явно разбиения $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}_{>0}$ и $\mathbb{C}^\times/\mathbb{T}$ группы $\mathbb{C}^\times$ и разбиение $\mathbb{R}^+/\mathbb{Z}^+$ группы $\mathbb{R}^+$.

(**2**) 2. а) Выпишите в цикловой записи все перестановки из группы $\mathrm{S}_3$. Выпишите в цикловой записи все перестановки из множества $\{u \in \mathrm{S}_5 \mid \kappa(u) = 2 \wedge u(1) = 2\}$ (должны получиться 11 перестановок).

б) Обозначим через $H$ подгруппу $\{\mathrm{id}_2, (1\ 2)\}$ группы $\mathrm{S}_3$. Перечислите все элементы разбиений $\mathrm{S}_3/H$ и $H\backslash\mathrm{S}_3$ группы $\mathrm{S}_3$ (должны получиться различные разбиения).

(**2**) 3. Проверьте явно, что группы $(\mathbb{Z}/9)^\times$, $(\mathbb{Z}/10)^\times$, $(\mathbb{Z}/17)^\times$ циклические. Вычислите порядки всех элементов групп $(\mathbb{Z}/9)^\times$ и $(\mathbb{Z}/10)^\times$. Найдите все первообразные корни по модулям 9 и 10.

(**2**) 4. Перечислите все элементы групп $(\mathbb{Z}/8)^\times$, $(\mathbb{Z}/12)^\times$, $(\mathbb{Z}/16)^\times$. Докажите, что $(\mathbb{Z}/8)^\times \cong (\mathbb{Z}/12)^\times \cong \mathrm{D}_2$ (значит, группы $(\mathbb{Z}/8)^\times$ и $(\mathbb{Z}/12)^\times$ нециклические). Докажите, что группа $(\mathbb{Z}/16)^\times$ нециклическая.

(**3**) 5. Для любого числа $k \in \mathbb{Z}$ и любой группы $G$ обозначим через $\mathrm{pow}_{k,G}$ отображение, действующее из $G$ в $G$ по правилу $g \mapsto g^k$ для любых $g \in G$.

а) Пусть $G$ — абелева группа; докажите, что $\forall\, k \in \mathbb{Z}\ (\mathrm{pow}_{k,G} \in \mathrm{End}(G))$ и $\mathrm{pow}_{-1,G} \in \mathrm{Aut}(G)$.

б) Пусть $G$ — группа, и $\mathrm{pow}_{2,G} \in \mathrm{End}(G)$ или $\mathrm{pow}_{-1,G} \in \mathrm{Aut}(G)$; докажите, что группа $G$ абелева.

(**3**) 6. Докажите, что $\mathbb{R}^+ \cong \mathbb{R}_{>0}$. Докажите, что $\mathbb{Q}^+ \not\cong \mathbb{Q}_{>0}$ и $\mathbb{C}^\times \not\cong \mathbb{R}^\times$.

(**3**) 7. а) Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $a \in (\mathbb{Z}/n)^+$; выразите $\mathrm{ord}(a)$ в группе $(\mathbb{Z}/n)^+$ в терминах чисел $a$ и $n$.

б) Пусть $n \in \mathbb{N}_0$ и $u \in \mathrm{S}_n$; выразите $\mathrm{ord}(u)$ в группе $\mathrm{S}_n$ в терминах длин циклов перестановки $u$.

(**4**) 8. Докажите лемму об обратимых остатках.

*Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{Z}/n$; тогда* $a \in (\mathbb{Z}/n)^\times \Leftrightarrow \gcd(a,n) = 1 \Leftrightarrow \langle a \rangle = (\mathbb{Z}/n)^+$.

(Сначала докажите, что $a \in (\mathbb{Z}/n)^\times \Leftrightarrow \langle a \rangle = (\mathbb{Z}/n)^+$; затем, используя результат пункта а задачи 7, докажите, что $\gcd(a,n) = 1 \Leftrightarrow \langle a \rangle = (\mathbb{Z}/n)^+$.)

(**4**) 9. а) Пусть $G$ — группа, $|G| < \infty$ и $g \in G$; докажите, что $g^{|G|} = 1$ и $\forall\, k \in \mathbb{Z}\ (g^k = 1 \Leftrightarrow g^{\gcd(k,|G|)} = 1)$.

б) Применяя лемму об обратимых остатках к группе $(\mathbb{Z}/p)^\times$, где $p \in \mathbb{P}$, докажите малую теорему Ферма: $\forall\, p \in \mathbb{P},\ a \in \mathbb{Z}\ \big(p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod p\big)$.

(**4**) 10. а) Пусть $G$ — группа; элементы $x$ и $y$ группы $G$ называются *сопряженными*, если $\exists\, g \in G\ (gxg^{-1} = y)$. Докажите, что сопряженность — отношение эквивалентности.

б) Пусть $G$ — группа и $H \leq G$; докажите, что

$$\forall\, g \in G\ (gHg^{-1} \subseteq H) \Leftrightarrow \forall\, g \in G\ (gH = Hg) \Leftrightarrow G/H = H\backslash G.$$

в) Пусть $G$ — группа, $H \leq G$ и $|G : H| = 2$; докажите, что $G/H = H\backslash G$.