Мощности и порядки

Это домашнее задание посвящено понятию мощности множества и понятию частично упорядоченного множества со всеми вытекающими последствиями. Первое задание осталось с пары.

Задание 1. Посчитайте количество сюръекций из n-элементного множества в m-элементное (предъявите явную формулу — она не очень хорошая, но есть).

Задание 2. Найдите явную формулу для биекции $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, которая перечисляет пары натуральных чисел подряд вдоль диагоналей.

Определение 1. *Функция $f\colon A \to B$ называется обратимой справа если существует $g\colon B \to A$, такое что $f \circ g = id_B$ (а обратимой слева, если $g \circ f = id_A$).*

Задание 3. Покажите, что функция f инъективна тогда и только тогда, когда она обратима слева, а сюръективна тогда и только тогда, когда она обратима справа.

Задание 4. Покажите, что функция f сюръективна тогда и только тогда, когда для любого множества C и любой пары отображений $g, h\colon B \to C$ из того что $g \circ f = h \circ f$ следует, что $h = g$.(сюръекцию можно сокращать справа).

Задание 5. Аналогично, покажите, что функция f инъективна тогда и только тогда, когда для любого множества C и любой пары отображений $g, h\colon C \to A$ из того что $f \circ g = f \circ h$ следует, что $g = h$(инъекцию можно сокращать слева).

Задание 6. Рассмотрим n элементное множество A. Каких подмножеств множества A больше - чётных или нечётных?

Задание 7. Посчитайте количество биекций f из n-элементного множества в себя, которые имеют хотя бы одну неподвижную точку (т.е такой x, что $f(x) = x$).

Простенькое замечание, которое уже сто раз использовалось.

Замечание. Пусть $X, \leq$ — частично упорядоченное множество, тогда любое $A \subset X$ естественным образом снабжается порядком ($a \leq b$ в A, если $a \leq b$ как элементы X). Этот порядок называется индуцированным. Я буду обозначать его тем же значком.

И это неплохо согласуется с тем, что привычные порядки на $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ обозначаются одинаково.

Определение 2. *Пусть $X, \leq$ и $Y, \preceq$ — частично упорядоченные множества. Тогда на произведении $X \times Y$ можно ввести следующее отношение порядка $(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a \leq c,\ b \preceq d$. Естественным образом это отношение порядка обобщается и на произведение большего числа частично упорядоченных множеств. Такое упорядочение будем называть естественным.*

Задание 8. Рассмотрим множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ с естественным упорядочиванием. Покажите, что в $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ нет бесконечного подмножества, любые два элемента которого несравнимы.

Задание 9. А можно ли в $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ найти бесконечное подмножество, любые два элемента которого несравнимы?

Определение 3. *Пусть $X, \leq$ и $Y, \preceq$ два частично упорядоченных множества. Отображение $f\colon X \to Y$ называется монотонным, если для любых $u \leq v \in X$ следует, что $f(u) \preceq f(v)$.*

Я буду говорить, что оно монотонно, а не монотонно возрастает, потому что убывающие отображения нам не понадобятся (до тех пор пока это не будет оговорено).

Определение 4. *Отображение f из предыдущего определения называется изоморфизмом, если оно биективно и обратное к нему так же монотонно.*

Наличие изоморфизма между упорядоченными множествами говорит, что по сути они устроены одинаково.

Задание 10. Бывает ли так, что обратное отображение к монотонной биекции не монотонно?

Задание 11. (Ценится за две) Постройте изоморфизм упорядоченного множества рациональных чисел в интервале $(0, 1)$ и множества рациональных чисел в интервале $(0, \sqrt{5})$.

Задание 12. Какие из указанных множеств $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ изоморфны, если порядок на них
а) лексикографический б) естественный.

Задание 13. Докажите, что любой частичный порядок на конечном множестве можно продолжить до линейного.

Задание 14. Постройте пример счётного частично упорядоченного множества, со счётным числом минимальных элементов, но в котором нет ни одного максимального элемента.

И ещё одна задачка, которая обсуждалась вскользь на паре, но которая не будет обязательной:

Задание 15. Задать отображение стереографической проекции из окружности на прямую явной полиномиальной формулой.