

Домашнее задание 7. 17.10.14

1. Установите, существует ли предел последовательности и, если он существует, найдите его:

а) (1) $x_n = \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n$;

б) (1) $x_n = \frac{3^{n+1} - (-4)^n}{(-3)^n + 4^{n+1}}$;

в) (1) $x_n = \log_{(n^5+3)}(n^2 + 2)$.

Неравенство Бернулли.

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \text{ при } x \geq -1, n \geq 1.$$

2. Докажите, что при $n \geq 2$

а) (1) $n^n \geq (n + 1)^{n-1}$;

б) (1) $\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \leq \frac{n}{n-1}$.

в) (1) $(1 + 1/10)^n \geq \frac{1}{2014}n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$.

3. а) (1) Докажите, что предел последовательности $x_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ равен $\frac{1}{2}$.

б) (2) Докажите, что последовательность $y_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ имеет конечный предел.

в) (3) Пусть последовательность $\{\sigma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такова, что $\sigma_k = \pm 1$. Докажите, что последовательность $z_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\sigma_k}{k^2}\right)$ имеет конечный положительный предел.