

Домашнее задание 1. Принцип Дирихле.

Группа 102/3

Количество баллов на зачёт: 6

1. (0,5 балла) В ящике лежат 10 белых и 12 чёрный носков. Какое минимальное количество из них надо взять, чтобы среди них обязательно нашлись два носка одного цвета?
2. (1 балл) На плоскости нарисовано n попарно непараллельных прямых. Докажите, что угол между по крайней мере двумя из этих прямых меньше или равен величине π/n .
3. (1 балл) Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 сантиметр расположено 17 точек. Докажите, что расстояние между какими-то двумя из них не превосходит 0,25 сантиметров.
4. (2 балла) Докажите, что в любом множестве из 52 целых чисел найдутся два числа, у которых либо сумма, либо разность делится на 100.
5. (1,5 балла) Какое максимальное количество королей можно поместить на шахматную доску так, чтобы никакие два короля не били друг друга?
6. (1,5 балла) Докажите, что в любом $(n + 1)$ -элементном подмножестве множества $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ обязательно найдутся два взаимно простых числа.
7. (1 балл) Узлы бесконечной клетчатой бумаги покрашены в 4 цвета. Докажите, что можно выбрать прямоугольник со сторонами, идущими по линиям сетки, все четыре вершины которого покрашены в один цвет.
8. (1,5 балла) Даны 9 натуральных чисел, ни одной из которых не имеется простого делителя, большего, чем 5. Докажите, что среди них найдутся два числа, произведение которых является точным квадратом.