

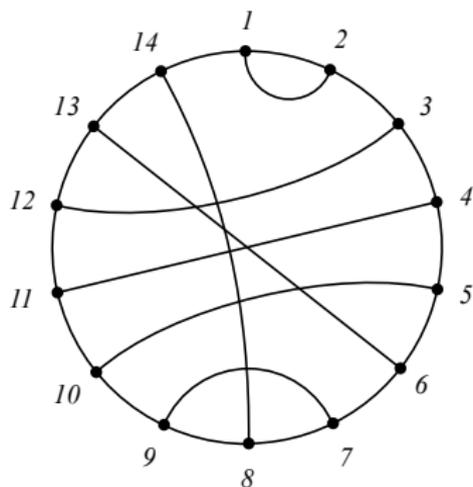
# Перечисление гамильтоновых циклов в полных $n$ -дольных графах $K_{d,d,\dots,d}$

Игорь Лабутин

Научный руководитель А.В. Омельченко

5 марта 2017 г.

# Хордовые диаграммы

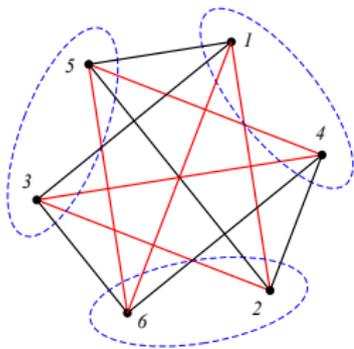


Хордовая диаграмма

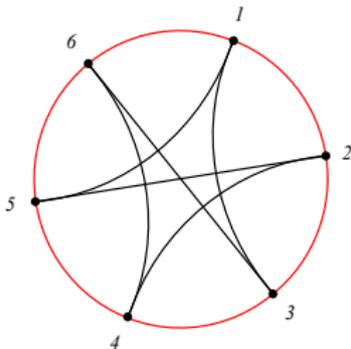
- ▶ Количество хордовых диаграмм равняется  $(2n - 1)!!$
- ▶ Рекуррентное соотношение для хордовых диаграмм без петель (M. Hazewinkel, V. Kalashnikov, 1995)

# Связь с гамильтоновыми циклами

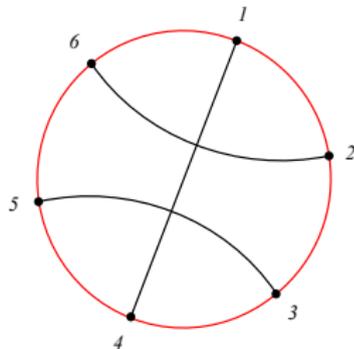
Существует биекция между хордовыми диаграммами без петель и гамильтоновыми циклами в полном  $n$ -дольном графе  $K_{2,2,\dots,2}$



Гамильтонов  
цикл в графе  
 $K_{2,2,2}$



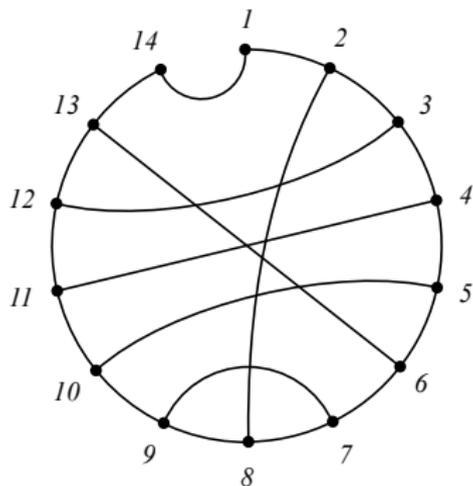
Расположили  
вершины по  
циклу



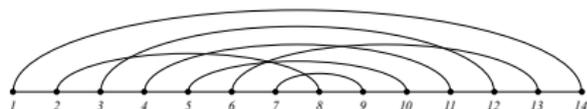
Взяли  
дополнение к  
графу

# Линейные диаграммы

1. Переход от хордовых диаграмм к линейным:



Хордовая диаграмма



Линейная диаграмма

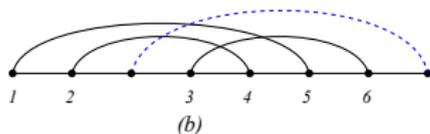
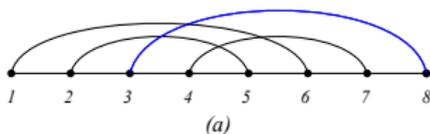
2. Связь между количеством  $b_n$  хордовых диаграмм без петель и числом  $a_n$  линейных диаграмм без петель:

$$b_n = a_n - a_{n-1}$$

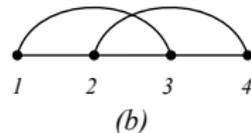
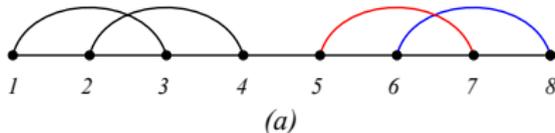
# Рекуррентное соотношение на $a_n$

$$a_n = (2n-2)a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-1}, \quad n \geq 2; \quad a_0 = 1, a_1 = 0.$$

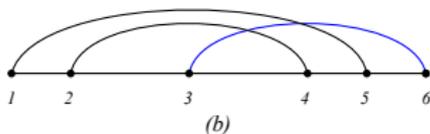
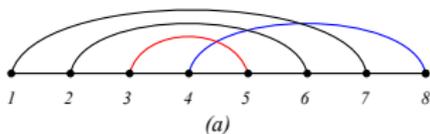
1. Слагаемое  $(2n-2)a_{n-1}$ :



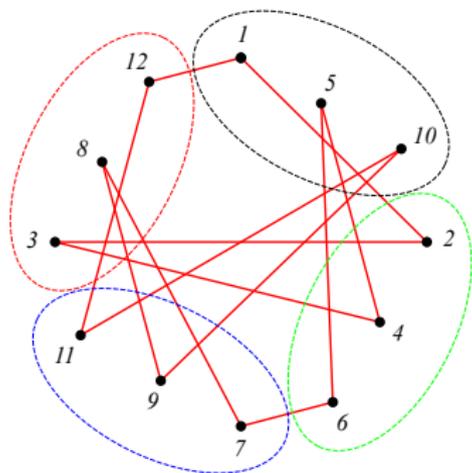
2. Слагаемое  $a_{n-2}$ :



3. Слагаемое  $a_{n-1}$ :



# Гамильтоновы циклы в графах $K_{d,d,\dots,d}$



Гамильтонов цикл в графе  $K_{3,3,3,3}$

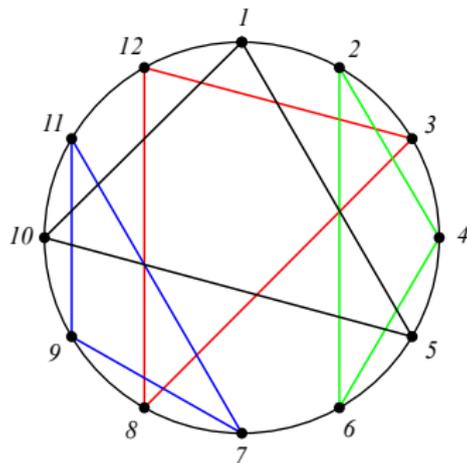


Диаграмма из треугольников без петель

## Предшествующие результаты

- ▶ Явная формула для количества помеченных  $b_n$  гамильтоновых циклов в  $n$ -мерном октаэдре (David Singmaster, 1974).
- ▶ Комбинаторное доказательство рекуррентного соотношения для чисел  $b_n$  (M. Hazewinkel, V. Kalashnikov, 1995).
- ▶ Рекуррентное соотношение для перестановок, изоморфных  $K_{3,3,\dots,3}$  (R. J. Mathar, 2014)
- ▶ Производящая функция и рекуррентные соотношения для непомеченных хордовых диаграмм (Е. Краско, А. Омельченко, 2015).
- ▶ Изоморфизм между хордовыми диаграммами и гамильтоновыми циклами (Е. Краско, А. Омельченко, 2016).

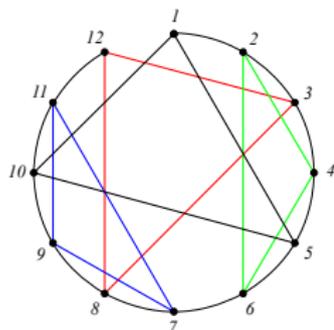
# Цель и задачи работы

- ▶ **Цель работы:** перечисление помеченных и непомеченных гамильтоновых циклов в полном  $n$ -дольном графе  $K_{d,d,\dots,d}$ .
- ▶ **Задачи:**
  - выразить число  $b_n$  диаграмм на окружности через количество линейных диаграмм с  $k$  петлями  $a_{n,k}$ ;
  - получить рекуррентное соотношение на числа  $a_{n,k}$ ;
  - получить систему рекуррентных соотношений на числа  $a_{n,i}$ ,  $i = 0, \dots, d$ ;
  - обобщить полученные результаты на непомеченный случай.

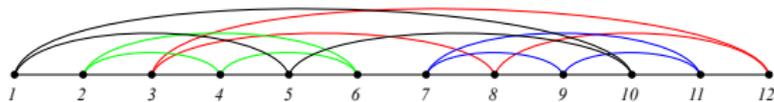
# Линейные диаграммы с фиксированным числом $k$ петель

Количество  $b_n$  диаграмм на окружности можно выразить через количество  $a_{n,k}$  линейных диаграмм с  $k$  петлями по формуле

$$b_n = a_{n,0} - \sum_{k=0}^{d-2} \binom{d(n-1) - k - 1}{d-2-k} a_{n-1,k}.$$



(a)



(b)

## Рекуррентное соотношение на числа $a_{n,k}$

Для подсчета количества  $a_{n,k}$  обобщенных линейных диаграмм с  $k$  петлями удалим полный подграф  $K_d$ , исходящий из крайней правой точки. В результате получим

$$c_{n,k,t} = \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i} \binom{t}{t+i-k} \binom{d(n-1)-t}{d-2i-t+k-1}$$

обобщенных линейных диаграмм с  $t$  петлями. При этом числа  $a_{n,k}$  будут рассчитываться по формуле

$$a_{n,k} = \sum_{t=k-d+1}^{k+d-1} c_{n,k,t} \cdot a_{n-1,t}, \quad k \leq n(d-1).$$

# Система рекуррентных соотношений

Получен алгоритм построения системы из  $d$  соотношений на число диаграмм с  $0 \leq k < d$  петлями:

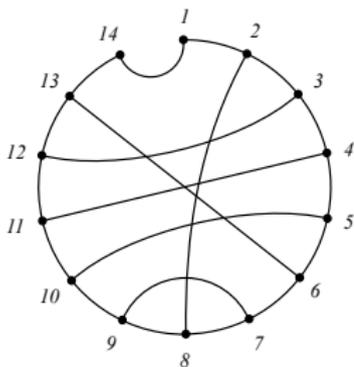
- ▶ Зная  $a_{n-1,k}$ ,  $k = 0..d - 1$ , из двухпараметрического соотношения можно выразить  $a_{n-l,m}$ , где  $l = 2..d - 1$ ,  $m = 0..l(d - 1)$
- ▶ Перебираем, как распределились петли по подмножествам  $K_d$
- ▶ При удалении всех  $l \leq k < d$  подмножеств с хотя бы одной лункой получится диаграмма с  $m \leq l(d - 1)$  петлями
- ▶ Для фиксированного разбиения считаем сколько нужно прибавить динамикой
- ▶ Чтобы получить соотношения, все операции проводим не с числами, а с многочленами с рациональными коэффициентами

# Перечисление хордовых диаграмм с учетом вращений

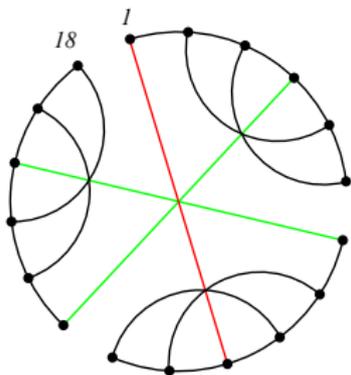
Для подсчета количества хордовых диаграмм с учетом вращений воспользуемся леммой Бернсайда:

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{2n} \sum_{d|2n} \varphi(d) \cdot f(2n, d).$$

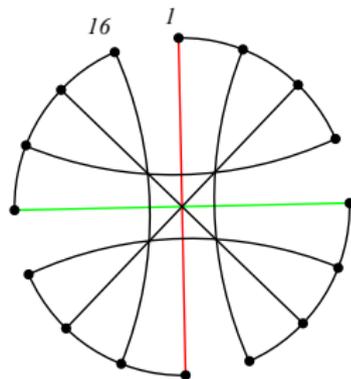
Здесь  $f(2n, d)$  — число  $d$ -симметричных диаграмм.



1-линейная  
диаграмма



3-линейная  
диаграмма

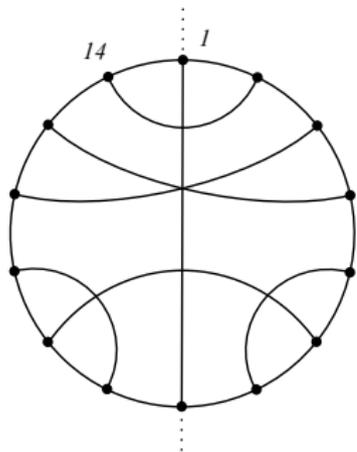


4-линейная  
диаграмма

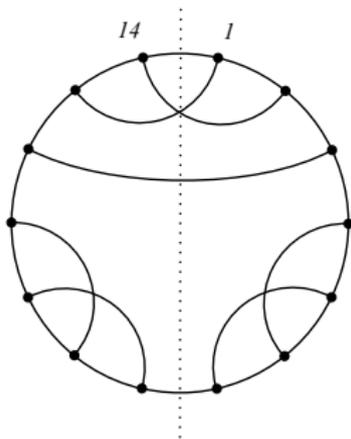
# Перечисление хордовых диаграмм с учетом вращений и отражений

$$\hat{b}_n = \frac{1}{4n} \sum_{d|2n} \varphi(d) f(2n, d) + nK(n) + nH(n),$$

$$K(n) = a_{n-1}^{(2)}, \quad H(n) = a_n^{(2)} - 2a_{n-1}^{(2)} + a_{n-2}^{(2)}.$$



Ось симметрии  
через хорду



Ось симметрии  
не через хорду

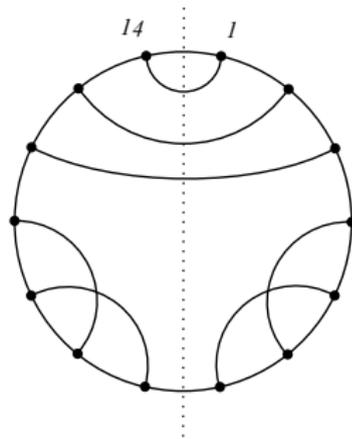


Диаграмма с  
петлей сверху

# Перечисление гамильтоновых циклов в графе $K_{3,3,\dots,3}$ с учетом вращений

По лемме Бернсайда,

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{3n} \sum_{d|3n} \varphi(d) f(3n, d),$$

$$f(3n, d) = a_{3n/d, 0}^{(d)} - d \cdot a_{3n/d-3, 1}^{(d)} - (d(n-2) - 2) \cdot a_{3n/d-3, 0}^{(d)}.$$

Количество  $a_{n,k}^{(d)}$   $d$ -линейных диаграмм с  $k$  петлями равно

$$\begin{aligned} a_{n,k}^{(d)} &= a_{n-3,k-2}^{(d)} + 2(d(n-k-1) - 1) a_{n-3,k-1}^{(d)} + \\ &+ \left( 2dk + (d-1)(n-k+2) \left( d(n-k-1) + \frac{n-k-5}{2} \right) \right) a_{n-3,k}^{(d)} + \\ &+ (d(k+1)(d(n-k-2) - 2)) a_{n-3,k+1}^{(d)} + d^2 \binom{k+2}{2} a_{n-3,k+2}^{(d)}. \end{aligned}$$

# Результаты работы

- ▶ Задача перечисления гамильтоновых циклов в графе  $K_{d,d,\dots,d}$  сведена к подсчету количества  $a_{n,k}$  обобщенных линейных диаграмм с  $k$  петлями.
- ▶ Получено двухпараметрическое рекуррентное соотношение на числа  $a_{n,k}$ .
- ▶ Предложен и реализован алгоритм генерации системы  $d$  рекуррентных соотношений на числа  $a_{n,k}$ ,  $k = 0, \dots, d - 1$ .
- ▶ Получено двухпараметрическое рекуррентное соотношение на количество непомеченных гамильтоновых циклов в графе  $K_{3,3,\dots,3}$ .