Курс: Функциональное программирование

Лекция 3. Простые типы

Денис Николаевич Москвин

07.10.2011

Кафедра математических и информационных технологий
Санкт-Петербургского академического университета

План лекции

- Понятие типа
- Просто типизированное λ-исчисление
- Контексты и правила типизации
- Свойства $\lambda\!\to$

План лекции

- Понятие типа
- Просто типизированное λ-исчисление
- Контексты и правила типизации
- Свойства $\lambda{\rightarrow}$

Что такое типы?

Система типов — это гибко управляемый синтаксический метод доказательства отсутствия в программе определенных видов поведения при помощи классификации выражений языка по разновидностям вычисляемых ими значений.

Бенджамин Пирс

У нас:
выражения — λ-термы,
вычисление — их редукция,
значения — (WH)NF.

Типы — *синтаксические* конструкции, приписываемые термам по определённым правилам:

$$M : \sigma$$

Для чего нужны типы?

- Типы дают частичную спецификацию

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad\qquad g : (\forall n : \mathbb{N}.\, \exists m : \mathbb{N}.\, m > n)$$

- Правильно типизированные программы не могут «сломаться». Робин Милнер (1978)

$$M : \sigma \;\wedge\; M \twoheadrightarrow v \;\Rightarrow\; v : \sigma$$

- Типизированные программы всегда завершаются (это не всегда так :)

- Проверка типов отлавливает простые ошибки

Какие бывают системы типов?

- Статические (static) vs динамические (dinamic)
- Сильные (strong) vs слабые (weak)
- Явные (explicit) vs неявные (implicit)

Стрелочный тип

В большинстве систем типизации тождественной функции $\mathbf{I} \equiv \lambda x.\, x$ может быть приписан тип $\alpha \to \alpha$

$$\mathbf{I} : \alpha \to \alpha$$

Если x, являющийся аргументом функции $\mathbf{I}$, имеет тип α, то значение $\mathbf{I}\,x$ тоже имеет тип α.

В общем случае $\alpha \to \beta$ является типом функции из α в β.

Системы Карри и Чёрча

Есть два семейства систем типов.

Системы в стиле Карри: Термы те же, что и в бестиповой теории. Каждый терм обладает множеством различных типов (пустое, одно- или многоэлементное, бесконечное).

Системы в стиле Чёрча: Термы — аннотированные версии бестиповых термов. Каждый терм имеет тип (обычно уникальный), выводимый из способа, которым терм аннотирован.

Иногда используют такую терминологию:

Системы в стиле Карри — лямбда-исчисление *с присваиванием типов*.

Системы в стиле Чёрча — системы *типизированного* лямбда-исчисления.

Два взгляда на типы

Подход программиста: термы интерпретируются как программы, а типы — как их частичные спецификации.

Системы в стиле Карри: неявная типизация (например, Haskell, Ocaml).

Системы в стиле Чёрча: явная типизация (большинство типизированных языков).

Логический подход: типы интерпретируются как высказывания, а термы — как их доказательства.

План лекции

- Понятие типа

- Просто типизированное λ-исчисление

- Контексты и правила типизации

- Свойства $\lambda_{\to}$

Просто типизированное λ-исчисление (1)

Самая простая система — это ***просто типизированное λ-исчисление*** ($\lambda\!\to$ или Simple Type Theory (STT)).

Множество типов $\mathbb{T}$ системы $\lambda\!\to$ определяется индуктивно:

$\alpha, \beta, \ldots \in \mathbb{T}$ (переменные типа)

$\sigma, \tau \in \mathbb{T} \Rightarrow (\sigma\!\to\!\tau) \in \mathbb{T}$ (типы пространства функций)

В абстрактном синтаксисе:

$$\mathbb{T} \;::=\; \mathbb{V} \mid \mathbb{T}\!\to\!\mathbb{T}$$

Здесь $\mathbb{V} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ — множество типовых переменных.

Соглашение: α, β, γ используем для типовых переменных, а σ, τ, ρ — для произвольных типов.

Просто типизированное λ-исчисление (2)

Стрелка правоассоциативна: если $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathbb{T}$, то

$$\sigma_1 \to \sigma_2 \to \ldots \to \sigma_n \;\equiv\; (\sigma_1 \to (\sigma_2 \to \ldots \to (\sigma_{n-1} \to \sigma_n) \ldots))$$

Примеры типов

$$\begin{aligned}
(\alpha \to \beta) &\equiv \alpha \to \beta \\
(\alpha \to (\beta \to \gamma)) &\equiv \alpha \to \beta \to \gamma \\
((\alpha \to \beta) \to \gamma) &\equiv (\alpha \to \beta) \to \gamma \\
((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))) &\equiv (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma \\
((\alpha \to \beta) \to (((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta)) &\equiv (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta
\end{aligned}$$

Всякий тип в $\lambda_{\to}$ может быть записан в виде

$$\sigma_1 \to \sigma_2 \to \ldots \to \sigma_n \to \alpha$$

Как типизировать термы? (1)

Если терм ***переменная*** — как угодно:
$x{:}\alpha$, $y{:}\alpha \to \beta$, $z{:}(\alpha\to\beta)\to((\alpha\to\beta)\to\beta)\to\beta$.

Если терм ***аппликация*** $M\,N$, то

- M должно быть функцией, то есть иметь стрелочный тип $M{:}\sigma\to\tau$;
- N должно быть «подходящим» аргументом, то есть иметь тип $N{:}\sigma$;
- вся аппликация должна иметь тип результата применения функции: $(M\,N){:}\tau$.

Например, для $x{:}\alpha$, $y{:}\alpha \to \beta$ имеем $(y\,x){:}\beta$.
Добавив $z{:}\beta \to \gamma$, получим $z\,(y\,x){:}\gamma$.

Как типизировать термы? (2)

Если терм ***абстракция*** $\lambda x.\, M$, то тип должен быть стрелочным $(\lambda x.\, M) : \sigma \to \tau$, причём тип аргумента $x : \sigma$ и тип тела абстракции $M{:}\tau$.

Например, для $x{:}\alpha$ имеем $(\lambda x.\, x){:}\alpha\to\alpha$.

А надо ли здесь отдельно указывать, что $x{:}\alpha$?
Если не указать, то допустимо и $(\lambda x.\, x) : \beta \to \beta$ и даже $(\lambda x.\, x) : (\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\beta)$ — стиль Карри.
Если указать $(\lambda x : \alpha.\, x) : \alpha \to \alpha$, то тип терма определяется однозначно — стиль Чёрча.

Как типизировать термы? (3)

Правила ассоциативности для типов (вправо), аппликации (влево) и абстракции (вправо) хорошо согласованы друг с другом:

$$F:\alpha\to(\beta\to(\gamma\to\delta)) \qquad (M:\alpha,\ N:\beta,\ P:\gamma)$$

$$(F\,M):\beta\to(\gamma\to\delta)$$

$$((F\,M)\,N):\gamma\to\delta$$

$$(((F\,M)\,N)\,P):\delta$$

$$Q:\rho$$

$$(\lambda y:\tau.\ Q):\tau\to\rho$$

$$(\lambda x:\sigma.\ (\lambda y:\tau.\ Q)):\sigma\to(\tau\to\rho)$$

Зелёные скобки опускаются.

План лекции

- Понятие типа
- Просто типизированное λ-исчисление
- Контексты и правила типизации
- Свойства $\lambda{\rightarrow}$

Предтермы системы $\lambda\!\to$ а ля Карри

Множество ***предтермов*** (или ***псевдотермов***) Λ строится из переменных из $V = \{x, y, z, \ldots\}$ с помощью аппликации и абстракции:

$$\begin{array}{rcl} x \in V & \Rightarrow & x \in \Lambda \\ M, N \in \Lambda & \Rightarrow & (M\,N) \in \Lambda \\ M \in \Lambda, x \in V & \Rightarrow & (\lambda x.\,M) \in \Lambda \end{array}$$

В абстрактном синтаксисе

$$\Lambda \ ::= \ V \mid (\Lambda\,\Lambda) \mid (\lambda V.\,\Lambda)$$

То есть предтермы — это термы бестипового λ-исчисления.

Предермы системы $\lambda\!\to$ а ля Чёрч

Множество ***предтермов*** $\Lambda_{\mathbb{T}}$ строится из переменных из $V = \{x, y, z, \ldots\}$ с помощью аппликации и аннотированной типами абстракции:

$$\begin{array}{rcl} x \in V & \Rightarrow & x \in \Lambda_{\mathbb{T}} \\ M, N \in \Lambda_{\mathbb{T}} & \Rightarrow & (M\,N) \in \Lambda_{\mathbb{T}} \\ M \in \Lambda_{\mathbb{T}}, x \in V, \sigma \in \mathbb{T} & \Rightarrow & (\lambda x{:}\sigma.\, M) \in \Lambda_{\mathbb{T}} \end{array}$$

В абстрактном синтаксисе

$$\Lambda_{\mathbb{T}} \ ::= \ V \mid (\Lambda_{\mathbb{T}}\,\Lambda_{\mathbb{T}}) \mid (\lambda V{:}\mathbb{T}.\, \Lambda_{\mathbb{T}})$$

Все соглашения о скобках и ассоциативности те же, что в Λ.

Примеры предтермов

Система $\lambda\!\to$ а ля Карри:

$$\lambda x\, y.\, x$$

$$\lambda f\, g\, x.\, f\,(g\, x)$$

$$\lambda x.\, x\, x$$

Система $\lambda\!\to$ а ля Чёрч:

$$\lambda x{:}\alpha.\, \lambda y{:}\beta.\, x \;\equiv\; \lambda x^{\alpha}\, y^{\beta}.\, x$$

$$\lambda x{:}\alpha.\, \lambda y{:}\alpha.\, x \;\equiv\; \lambda x^{\alpha}\, y^{\alpha}.\, x$$

$$\lambda f{:}\alpha.\, \lambda g{:}\beta.\, \lambda x{:}\gamma.\, f\,(g\, x) \;\equiv\; \lambda f^{\alpha}\, g^{\beta}\, x^{\gamma}.\, f\,(g\, x)$$

$$\lambda f{:}(\beta \to \gamma).\, \lambda g{:}(\alpha \to \beta).\, \lambda x{:}\alpha.\, f\,(g\, x) \;\equiv\; \lambda f^{\beta\to\gamma}\, g^{\alpha\to\beta}\, x^{\alpha}.\, f\,(g\, x)$$

$$\lambda x{:}\alpha.\, x\, x \;\equiv\; \lambda x^{\alpha}.\, x\, x$$

Утверждение о типизации

Утверждение (о типизации) в $\lambda_\to$ «а ля Карри» имеет вид

$$M : \tau$$

где $M \in \Lambda$ и $\tau \in \mathbb{T}$. Тип τ иногда называют ***предикатом***, а терм M — ***субъектом*** утверждения.

$$(\lambda x.\, x) : \alpha \to \alpha \qquad (\lambda x.\, x) : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta \qquad (\lambda x\, y.\, x) : \alpha \to \beta \to \alpha$$

Для $\lambda_\to$ «а ля Чёрч» надо лишь заменить Λ на $\Lambda_{\mathbb{T}}$

$$(\lambda x{:}\alpha.\, x) : \alpha \to \alpha \qquad (\lambda x^{\alpha \to \beta}.\, x) : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta \qquad (\lambda x^{\alpha} y^{\beta}.\, x) : \alpha \to \beta \to \alpha$$

Объявления

Объявление — это утверждение (о типизации) с термовой переменной в качестве субъекта.

$$x:\alpha$$

$$y:\beta$$

$$f:\alpha\to\beta$$

$$g:(\alpha\to\beta)\to\gamma$$

Контексты

Контекст — это множество объявлений с *различными* переменными в качестве субъекта.

$$\Gamma = \{x_1\!:\!\sigma_1, x_2\!:\!\sigma_2, \ldots, x_n\!:\!\sigma_n\}$$

(контекст иногда называют базисом или окружением)
Фигурные скобки множества иногда опускают:

$$\Gamma = x\!:\!\alpha, y\!:\!\beta, f\!:\!\alpha\to\beta, g\!:\!(\alpha\to\beta)\to\gamma$$

Контексты можно ***расширять***, добавляя объявление *новой* переменной:

$$\Delta = \Gamma, z\!:\!\alpha\to\gamma = x\!:\!\alpha, y\!:\!\beta, f\!:\!\alpha\to\beta, g\!:\!(\alpha\to\beta)\to\gamma, z\!:\!\alpha\to\gamma$$

Контекст можно рассматривать как (частичную) функцию из множества переменных V в множество типов $\mathbb{T}$.

Правила типизации $\lambda{\rightarrow}$ «а ля Карри»

Утверждение $M : \tau$ называется ***выводимым*** в контексте Γ, обозначение

$$\Gamma \vdash M{:}\tau$$

если его вывод может быть произведен по правилам:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (x{:}\sigma) \in \Gamma & \Rightarrow & \Gamma \vdash x{:}\sigma \\ \\ \Gamma \vdash M{:}\sigma{\rightarrow}\tau, \Gamma \vdash N{:}\sigma & \Rightarrow & \Gamma \vdash (M\,N){:}\tau \\ \\ \Gamma, x{:}\sigma \vdash M{:}\tau & \Rightarrow & \Gamma \vdash (\lambda x.\,M){:}\sigma{\rightarrow}\tau \end{array}}$$

Если существуют Γ и τ, такие что $\Gamma \vdash M{:}\tau$, то предтерм M называют (допустимым) термом.

Правила типизации $\lambda_\to$ «а ля Карри» (2)

(аксиома)	$\Gamma \vdash x{:}\sigma$, если $(x{:}\sigma) \in \Gamma$
(удаление $\to$)	$\dfrac{\Gamma \vdash M{:}\sigma\to\tau \quad \Gamma \vdash N{:}\sigma}{\Gamma \vdash (M\,N){:}\tau}$
(введение $\to$)	$\dfrac{\Gamma, x{:}\sigma \vdash M{:}\tau}{\Gamma \vdash (\lambda x.\, M){:}\sigma\to\tau}$

Пример дерева вывода типа для $\lambda x\, y.\, x$

$$\dfrac{\dfrac{x{:}\alpha, y{:}\beta \vdash x{:}\alpha}{x{:}\alpha \vdash (\lambda y.\, x){:}\beta\to\alpha}}{\vdash (\lambda x\, y.\, x){:}\alpha\to\beta\to\alpha}$$

То есть для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ верно $\vdash (\lambda x\, y.\, x){:}\alpha\to\beta\to\alpha$.

Правила типизации $\lambda\!\to$ «а ля Чёрч»

(аксиома)	$\Gamma \vdash x : \sigma$, если $(x : \sigma) \in \Gamma$
(удаление $\to$)	$\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (M\,N) : \tau}$
(введение $\to$)	$\dfrac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma .\, M) : \sigma \to \tau}$

Вывод типа для $\lambda x^{\alpha} y^{\beta} .\, x$ проще

$$\dfrac{\dfrac{x : \alpha, y : \beta \vdash x : \alpha}{x : \alpha \vdash (\lambda y : \beta .\, x) : \beta \to \alpha}}{\vdash (\lambda x : \alpha .\, \lambda y : \beta .\, x) : \alpha \to \beta \to \alpha}$$

То есть для каждых $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ верно $\vdash (\lambda x^{\alpha} y^{\beta} .\, x) : \alpha \to \beta \to \alpha$.

План лекции

- Понятие типа
- Просто типизированное λ-исчисление
- Контексты и правила типизации
- Свойства $\lambda_{\rightarrow}$

Свойства $\lambda{\to}$

Лемма об инверсии

- $\Gamma \vdash x{:}\sigma \;\Rightarrow\; (x{:}\sigma) \in \Gamma$.
- $\Gamma \vdash (M\,N){:}\tau \;\Rightarrow\; \exists\sigma\; [\Gamma \vdash M{:}\sigma{\to}\tau \;\wedge\; \Gamma \vdash N{:}\sigma]$.
- $\Gamma \vdash (\lambda x.\, M) : \rho \;\Rightarrow\; \exists\sigma,\tau\; [\Gamma, x{:}\sigma \vdash M{:}\tau \;\wedge\; \rho \equiv \sigma{\to}\tau]$. ($\lambda{\to}$ а ля Карри)
- $\Gamma \vdash (\lambda x{:}\sigma.\, M) : \rho \;\Rightarrow\; \exists\tau\; [\Gamma, x{:}\sigma \vdash M{:}\tau \;\wedge\; \rho \equiv \sigma{\to}\tau]$. ($\lambda{\to}$ а ля Чёрч)

Типизируемость подтерма

Пусть M' — подтерм M. Тогда $\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; \Gamma' \vdash M' : \sigma'$ для некоторых Γ' и σ'. То есть, если терм имеет тип, то каждый его подтерм тоже имеет тип.

Леммы о контекстах

Какой контекст требуется, чтобы произвести присваивание типов?

Пусть Γ и Δ — контексты, причём $\Delta \supseteq \Gamma$. Тогда:

- $\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; \Delta \vdash M : \sigma$. Thinning, расширение контекста не влияет на выводимость утверждения типизации.
- $\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; FV(M) \subseteq \mathrm{dom}(\Gamma)$. Свободные переменные типизированного терма должны присутствовать в контексте.
- $\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; \Gamma \upharpoonright FV(M) \vdash M : \sigma$. Сужение контекста до множества свободных переменных терма не влияет на выводимость утверждения типизации.

Свойства $\lambda\!\rightarrow$: нетипизируемые предтермы

Рассмотрим предтерм $x\,x$. Предположим, что это терм. Тогда имеются Γ и σ, такие что

$$\Gamma \vdash (x\,x):\sigma$$

По лемме об инверсии существует такой τ, что правый подтерм $x:\tau$, а левый подтерм (тоже x) имеет тип $\tau\to\sigma$.
По лемме о контекстах $x \in \mathrm{dom}(\Gamma)$ и должен иметь там *единственное* связывание по определению контекста. То есть $\tau = \tau\to\sigma$ — тип является подвыражением себя, чего не может быть, поскольку (*и пока*) типы конечны.

$$x:\tau \nvdash (x\,x):\sigma, \quad \nvdash \omega:\sigma, \quad \nvdash \mathbf{\Omega}:\sigma, \quad \nvdash \mathbf{Y}:\sigma.$$

Предтермы $\omega = \lambda x.\, x\,x$, $\mathbf{\Omega} = \omega\,\omega$ и $\mathbf{Y} = \lambda f\,.\,(\lambda x\,.\,f(x\,x))(\lambda x\,.\,f(x\,x))$ не имеют типа по свойству о типизируемости подтерма.

Свойства $\lambda\to$: лемма подстановки типа

Для $\sigma, \tau \in \mathbb{T}$ ***подстановку*** τ вместо α в σ обозначим $\sigma[\alpha := \tau]$.
Пример:

$$(\alpha \to \beta \to \alpha)[\alpha := \gamma \to \gamma] \;=\; (\gamma \to \gamma) \to \beta \to \gamma \to \gamma$$

Лемма подстановки типа

- $\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; \Gamma[\alpha := \tau] \vdash M : \sigma[\alpha := \tau]$. ($\lambda\to$ а ля Карри)
- $\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; \Gamma[\alpha := \tau] \vdash M[\alpha := \tau] : \sigma[\alpha := \tau]$. ($\lambda\to$ а ля Чёрч)

Пример. Подстановка $[\alpha := \gamma \to \gamma]$:

$$\begin{array}{rcl} x:\alpha & \vdash & (\lambda y^{\alpha} z^{\beta}.\, x) : \alpha \to \beta \to \alpha \qquad \Rightarrow \\ x:\gamma \to \gamma & \vdash & (\lambda y^{\gamma \to \gamma} z^{\beta}.\, x) : (\gamma \to \gamma) \to \beta \to \gamma \to \gamma \end{array}$$

Свойства $\lambda\!\to$: лемма подстановки терма

Лемма подстановки терма
Пусть $\Gamma, x{:}\sigma \vdash M{:}\tau$ и $\Gamma \vdash N{:}\sigma$, тогда $\Gamma \vdash M[x := N]{:}\tau$.
То есть, подходящая по типу ***подстановка сохраняет тип***.

Пример. Берём терм

$$x{:}\gamma\to\gamma \;\vdash\; (\lambda y^{\beta}.\, x){:}\beta\to\gamma\to\gamma$$

и подставляем в него вместо свободной переменной $x{:}\gamma\to\gamma$ терм $\mathbf{I}_{\gamma} \equiv \lambda p^{\gamma}.\, p$ подходящего типа $\gamma\to\gamma$. Получаем

$$\vdash\; (\lambda y^{\beta}\, p^{\gamma}.\, p){:}\beta\to\gamma\to\gamma$$

Свойства $\lambda{\to}$: редукция субъекта (1)

Теорема о редукции субъекта

Пусть $M \twoheadrightarrow_\beta N$. Тогда $\Gamma \vdash M:\sigma \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash N:\sigma$.

То есть, β-***редукция терма сохраняет его тип***.

С «вычислительной» точки зрения это одно из ключевых свойств любой системы типов.

Следствие: множество типизируемых в $\lambda{\to}$ термов замкнуто относительно редукции.

Свойства $\lambda{\to}$: единственность типа

Теорема о единственности типа для $\lambda{\to}$ а ля Чёрч

▶ Пусть $\Gamma \vdash M : \sigma$ и $\Gamma \vdash M : \tau$. Тогда $\sigma \equiv \tau$. Терм в $\lambda{\to}$ имеет единственный тип.

▶ Пусть $\Gamma \vdash M{:}\sigma$, $\Gamma \vdash N{:}\tau$ и $M =_\beta N$. Тогда $\sigma \equiv \tau$. Типизируемые β-конвертируемые термы имеют один тип.

Для систем в стиле Карри единственности типа нет.

Связь между системами Карри и Чёрча

Можно задать стирающее отображение $|\cdot|:\Lambda_{\mathbb{T}} \to \Lambda$:

$$\begin{array}{rcl} |x| & \equiv & x \\ |M\,N| & \equiv & |M|\,|N| \\ |\lambda x\!:\!\sigma.\,M| & \equiv & \lambda x.\,|M| \end{array}$$

Все атрибутированные типами термы из версии Чёрча $\lambda\!\to$ «проектируются» в термы в версии Карри:

- $M \in \Lambda_{\mathbb{T}} \;\wedge\; \Gamma \vdash_{\text{Ч}} M\!:\!\sigma \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_{\text{К}} |M|\!:\!\sigma$

Термы из версии Карри $\lambda\!\to$ могут быть «подняты» в термы из версии Чёрча:

- $M \in \Lambda \;\wedge\; \Gamma \vdash_{\text{К}} M\!:\!\sigma \;\Rightarrow\; \exists N \in \Lambda_{\mathbb{T}}\,[\Gamma \vdash_{\text{Ч}} N\!:\!\sigma \;\wedge\; |N| \equiv M]$

Для произвольного типа $\sigma \in \mathbb{T}$ выполняется

$$\sigma \text{ обитаем в } \lambda\!\to\text{-Карри} \;\Leftrightarrow\; \sigma \text{ обитаем в } \lambda\!\to\text{-Чёрч}$$

Проблемы разрешимости

Есть ли алгоритм, который позволяют решить задачу?

$\vdash M : \sigma ?$	Задача проверки типа Type Checking Problem	ЗПТ TCP
$\vdash M : ?$	Задача синтеза типа Type Synthesis (or Assgnment) Problem	ЗСТ TSP, TAP
$\vdash ? : \sigma$	Задача обитаемости типа Type Inhabitation Problem	ЗОТ TIP

Для $\lambda\!\rightarrow$ (и в стиле Чёрча, и в стиле Карри) все эти задачи разрешимы.

ЗПТ выглядит проще ЗСТ, но обычно они эквивалентны: проверка $(M\,N) : \sigma ?$ требует синтеза $N : ?$.

Слабая и сильная нормализация (Weak and Strong Normalization)

- Терм называют ***слабо нормализуемым*** (WN), если имеется последовательность редукций, приводящих его к нормальной форме.

- Терм называют ***сильно нормализуемым*** (SN), если любая последовательность редукций, приводит его к нормальной форме.

Пример. Терм $\mathbf{KIK}$ — SN, терм $\mathbf{KI\Omega}$ — WN, терм $\mathbf{\Omega}$ — не нормализуем.

Слабая и сильная нормализация

- Систему типов называют ***слабо нормализуемой*** если все её допустимые термы — WN.

- Систему типов называют ***сильно нормализуемой*** если все её допустимые термы — SN.

Обе системы $\lambda_{\rightarrow}$ (и Карри, и Чёрча) *сильно нормализуемы*.