

## Задание 4

17.03.2017

**FL 10** Пусть язык  $L$  распознается некоторым DFA. Всегда ли следующие языки распознаются конечными автоматами?

d)  $\frac{1}{2}L = \{u \mid u \in \Sigma^*, \exists v \in \Sigma^* : |u| = |v|, uv \in L\}$

e)  $SUBSEQ(L) = \{a_1, \dots, a_n \mid n \geq 0, a_i \in \Sigma, \exists u_0, \dots, u_n \in \Sigma^* : u_0 a_1 u_1 a_2 \dots, a_n u_n \in L\}$

f)  $PERMUTE(L) = \{a_{k_1}, \dots, a_{k_n} \mid n \geq 0, (k_1, \dots, k_n) \text{ — некоторая перестановка,}$

$a_i \in \Sigma, a_1, \dots, a_n \in L\}$

g)  $SHIFT(L) = \bigcup_{k \geq 0} \{a_{k+1}, \dots, a_n a_1, \dots, a_k \mid a_1, \dots, a_n \in L\}$

**FL 11** Докажите, что любой бесконечный язык, распознающийся DFA, можно разбить на два бесконечных регулярных языка, распознающихся DFA.

**FL 14** Существует ли такое семейство языков  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , что  $E_n$  распознается NFA с  $n$  состояниями, но требует DFA размера как минимум  $c^n$  для некоторого  $c > 1$ ?

**FL 15** Пусть  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Введём обозначение:

$$B_k(A) = \{w \mid w \text{ — представление некоторого числа из } A \text{ в } k\text{-ичной системе счисления}\}$$

Приведите пример множества  $A$ , для которого  $B_2(A)$  распознаётся DFA, а  $B_3(A)$  не распознаётся DFA.

**FL 16** Для некоторого NFA рассмотрим  $\hat{\delta}(q, w)$  — расширенную на все строки функцию перехода:

$$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q,$$

$$\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q, x)} \hat{\delta}(p, a)$$

Докажите, что для произвольного слова  $w$

$$\hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists r_0, \dots, r_{|w|} : r_0 = q_0, r_{|w|} \in F, r_i \in \delta(r_{i-1}, w_i)$$

**FL 17** Приведите регулярные выражения для следующих языков:

a) Множество слов из 0 и 1, в которых каждая пара смежных 0 находится перед парой смежных 1.

b) Множество слов из 0 и 1, не содержащих подслово 101.

c) Множество слов из 0 и 1, в которых число 0 делится на 3, а число 1 чётно.

**FL 18** Докажите нерегулярность следующих языков:

a)  $\{0^n \mid n \text{ — полный квадрат}\}$

b)  $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ — двоичное представление простого числа}\}$

**Определение.** Будем говорить, что DFA синхронизируется строкой  $s$ , если  $\forall q_1, q_2 \in Q : \delta(q_1, s) = \delta(q_2, s)$ .

**FL 19** Докажите, что если детерминированный автомат  $A$  имеет  $k$  состояний и синхронизируется некоторой строкой, то он также синхронизируется и строкой длины не более  $k^3$ .

**FL 20** Приведите алгоритм, который по данному DFA  $A$  вычисляет количество распознаваемых им слов длины  $n$  за время

a)  $poly(|Q_A| \cdot n)$

b)  $poly(|Q_A|) \cdot \log(n)$