Схемы из функциональных элементов.

1. Для любого заданного графа постройте схему глубины 3 для задачи о независимом множестве. Входы соответствуют вершинам и равны 1, если вы берете вершину в независимое множество. Схема должна выдавать 1 если соответствующий набор образует независимое множество в графе. В данной задаче гейты могут вычислять отрицание или дизъюнкцию и конъюнкцию любого(возможно больше 2) числа других гейтов. Множество вершин образует независимое множество, если оно не содержит ни одного ребра между выбранными вершинами. Глубина схемы — это длина наибольшего пути от входного гейта до выхода.

2. Покажите, что вычитание двух n-битовых чисел по модулю 2^n выполняется схемой размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$.

3. Докажите, что схема, вычисляющая булеву функцию f от n аргументов, у которой ни один аргумент не является фиктивным, имеет размер не менее cn и глубину не менее $c \log n$, где $c > 0$ — некоторая константа, зависящая от выбранного набора элементов. (Аргумент функции называют фиктивным, если от него значение функции не зависит.)

4. Определим глубину формул как максимальное число вложенных скобок; для единообразия будем окружать отрицание скобками и писать $(\neg A)$ вместо $\neg A$. Покажите, что при этом не получится ничего нового: минимальная глубина формула, записывающей некоторую функцию f, совпадает с минимальной глубиной схемы, вычисляющей f.

5. Объясните почему теорема о связи размеров схем в разных базисах не переносится на случай размера формул.

6. Вычислить сумму всех входных битов используя $5n$ гейтов.

7. Докажите, что функция большинства может быть вычислена не только схемой, но и формулой полиномиального размера, содержащей только связки $\wedge$ и $\vee$.

8. Покажите, что любая симметрическая функция(зависит только от количества единиц у входа) вычислима схемой размера $5n + o(n)$.

9. Докажите, что значения для любых двух базисо существует полином P(зависящий от базисов), что размер формулы S_1 в первом базисе меньше $P(S_2)$, где S_2 — размер формулы во втором базисе.

10. Определить, что вход содержит более одной единицы с помощью схемы размера $2n + o(n)$.