Space complexity

Конфигурация.

1) Состояние ($q \in Q$)
2) Индексы кареток на входной $\log n$ и рабочих лентах $k \cdot \log S(n)$.
3) Содержимое рабочих лент $O(S(n))$ (Входная лента не учитывается)

Граф конфигураций

$C \to C'$, если из C в один шаг попадаем в C'

Утв. 1) $\forall$ вершина графа конфигураций описывается $O(S(n))$ битами

2) $\exists$ $O(S(n))$ КНФ-формула $\varphi_{M,x}$, такая что $\varphi_{M,x}(C, C') = 1$ iff C и C' – соседние состояния в графе конфигураций $G_{M,x}$.

Space complexity classes

$$PSPACE = \bigcup_{c>0} SPACE(n^c)$$

$$NPSPACE = \bigcup_{c>0} NSPACE(n^c)$$

$$L = SPACE(\log n)$$

$$NL = NSPACE(\log n)$$

Example SAT, TQBF $\in$ PSPACE

Example $EVEN = \{x \mid x$ содержит четное число $1\}$

Note L кажется слабым классом, но мы не знаем $3SAT \in L$ или $3SAT \notin L$.

Open Q: ~~ET~~ $NP \stackrel{?}{=} L$

$S(n) \leq n$ — web crawling.

$PATH = \{(G, s, t) \mid G$ - directed graph, in G there is a path from s to $t\}$

Утв. $PATH \in NL$.

Док-во Угадаем путь $\underset{s}{\overset{\shortparallel}{v_0}}, v_1, v_2, \ldots, \underset{t}{\overset{\shortparallel}{v_n}}$ и проверим что v_i соед с v_{i+1}.

$\blacksquare$

OPEN Questions $PATH \stackrel{?}{\in} L$?

Surprise: Undirected $PATH \in L$.

PSPACE Completeness

A - PSPACE-трудный если $\forall L \in PSPACE$:

$$L \leq_p A.$$

A - PSPACE-полный если A - PSPACE-трудный и $A \in PSPACE$.

Упр $SPACE\ TM = \{\langle M, w, 1^n\rangle \mid TM\ M$ принимает w используя n памяти$\}$

Def TQBF.

Теорема:

TQBF является PSPACE полным.

Док-во:

I) TQBF $\in$ PSPACE, домашнее упр.

II) $\forall L \in PSPACE \quad L \leq_p TQBF$.

пусть $\exists$ M машина решающая L с $S(n)$ памятью.

Для x мы построим QBF — φ_x размера $O(S(n)^2)$

такую что $x \in L$ iff $\varphi_x \in TQBF$.

Рассмотрим граф конфигураций для машины M на входе x. В действительности нам хочется найти формулу $\psi(C_{start}, C_{accept}) = 1$ iff из C_{start} можно попасть в C_{accept} в графе $G_{M,x}$.

Можем написать такую формулу только если $d(C_{start}, C_{accept}) \leq 1$.

Хотим "такую же" формулу только построить для $d(C_{start}, C_{accept}) \leq 2^{O(S(n))}$

ψ_i формула для $d(C_{start}, C_{accept}) \leq 2^i$

$$\psi_i(C, C') = \exists C'' \ \psi_{i-1}(C, C'') \wedge \psi_{i-1}(C'', C')$$

Эта формула слишком большая.

$$\exists C'' \ \forall D_1 \ \forall D_2 \big((D_1 = C \wedge D_2 = C'') \vee (D_1 = C'' \wedge D_2 = C') \Rightarrow \psi_{i-1}(D_1, D_2) \big)$$

$$\mathrm{size}(\psi_i) \le \mathrm{size}(\psi_{i-1}) + O(S(n))$$

$$\mathrm{size}_{O(S(n))} \le O(S(n)^2)$$

Заметим ψ можно привести в разных base и ψ — это "КНФ" функция.

Все выше описанное работает и для

$L \in NPSPACE \Rightarrow$ TQBF является PSPACE-полным и NPSPACE-полным $\Rightarrow$ PSPACE $=$ NSPACE.

Теорема Савича

$\forall$ конструктивной по времени функции $S(n)$, $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $S(n) \ge \log(n)$ верно:

$$NSPACE(S(n)) \subseteq SPACE(S(n)^2)$$

Док-во: $L \in NSPACE(S(n))$ — M — машина Тьюринга для L. $|M| = 2^{O(S(n))}$, $G = G_{M,x}$.

$$Reach?(u, v, i)$$

Ответ $Reach?(s, t, \log M)$

$$Reach?(u,v,i) = \exists w\, Reach?(u,w,i-1) \wedge Reach?(w,v,i-1).$$

$$S_{M,i} = S_{M,i-1} + O(\log M)$$

$$S_{M,\log M} = O(\log^2 M) = O(S(n))^2.$$

NP-полные задачи — короткие подсказки.

PSPACE-полные задачи похожи на игры.

Example QBF-game.

$$\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots \forall x_{2n}\, \varphi(x_1 \ldots x_{2n}).$$

QBF-game is PSPACE-complete.

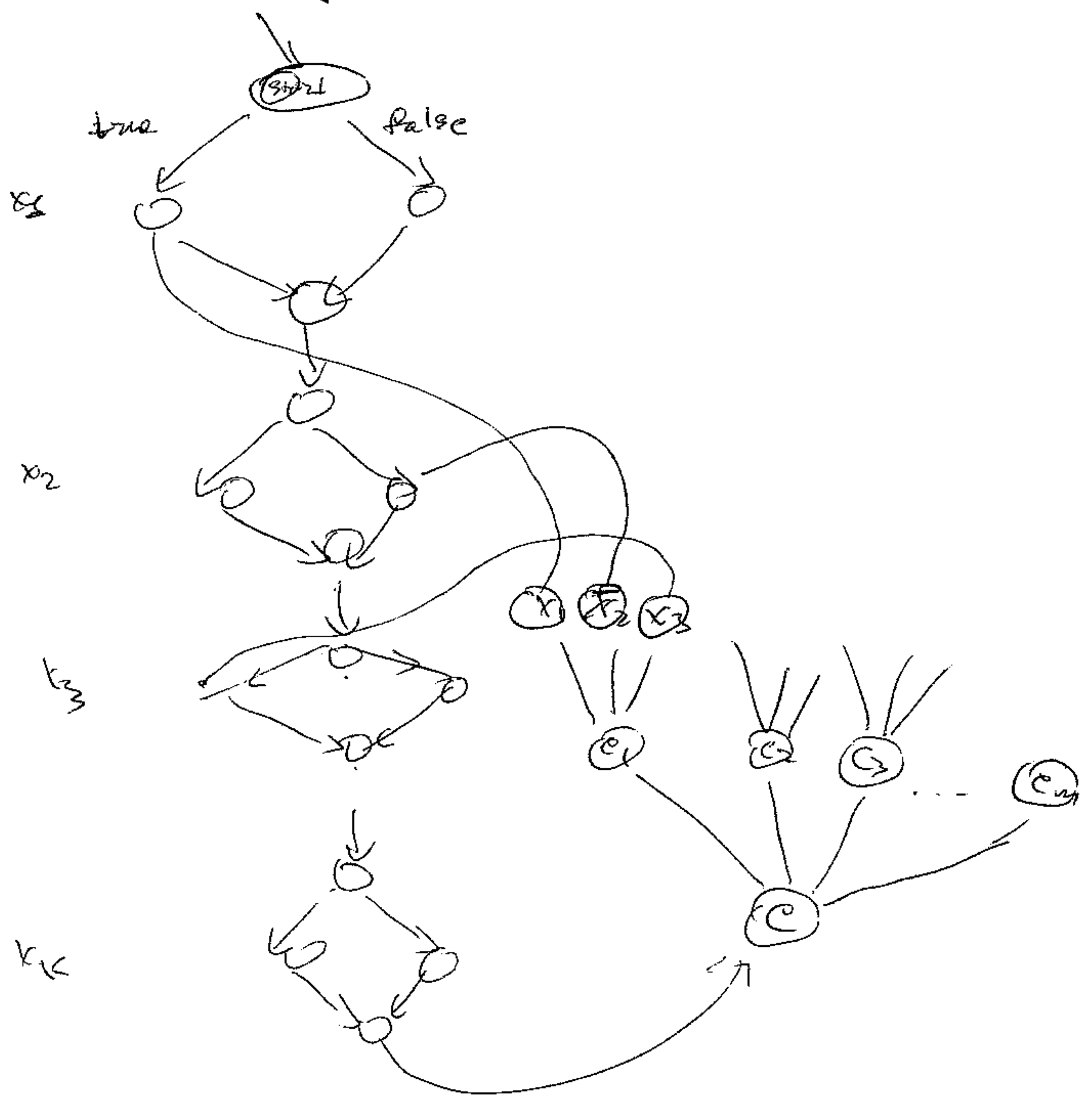
Вопрос аудитории

Шахматы PSPACE-трудны?

Пример Захвата в города.

Теорема Обобщенная задача в города PSPACE трудная.

Док-во: Сведем QBF к обобщенной задаче.



NL completeness

Глупо рассматривать сведения отн $\le_p$, поскольку тогда $\forall$ нетривиальный язык NL полон, ведь $NL \subseteq P$.

Мы рассматриваем сведения чтобы что-то понять про $L \overset{?}{=} NL$, тогда разумно рассматривать сведения не мощнее L.

Def $f: \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ – полином. ограниченная функция ($\exists c$ такое, что $|f(x)| \le |x|^c \; \forall x$).
f – неявно вычислима ~~в~~ с log памяти если языки $L_f = \{(x,i) \mid f(x)_i = 1\}$
$L_{f'} = \{\langle x,i\rangle \mid i \le |f(x)|\}$ $\in L$.

Неформально по входу (x,i) мы можем вывести $f(x)|_i$ если $i \le |f(x)|$

A log-сводится к B если $\exists$ неявно выч. функция с log памяти такая что $x \in A$ iff $f(x) \in B$.

Лемма (i) $A \le_l B$, $B \le_l C \Rightarrow A \le_l C$.
(ii) $A \le_l B$, $B \in L \Rightarrow A \in L$.

Def A является NL-полным если $A \in NL$ и $\forall B$ $B \le_l A$.

Теорема PATH – NL полон.

1) $PATH \in NL$ – ~~д~~ напомню ранее.

6

II) $L \in NL$ => если ~~ТМ~~ МТ M решающая L, то пути в графе $G_{M,x}$ таких, когда понять многозначно ли пятачно у C_{start} в C_{accept}.

Для этого нужно построить PATH экземпляр

C_{start}, C_{accept} — очевидно строятся

$\overset{\shortparallel}{s}$ $\overset{\shortparallel}{t}$

Остается только определить любую ячейку матрицы смежности графа $G_{M,x}$, но это делается за $\log n$ для $\forall$ обеих состояний C и C'.

<u>Сертификатное определение класса NL.</u>

У NP было два определения.

Введем альтернативное определение для класса NL с сертификатом.

<u>Def</u> $L \in NL$ если $\exists$ МТ M со специальной лентой которую можно прочитать лишь один раз. и $\exists$ полином $p: N \to N$ такой что

$\forall x \{0,1\}$

$$x \in L \iff \exists u \in \{0,1\}^{p(x)} \text{ s.t. } M(x\,u) = 1.$$

[x] входной ленты

[u] — лента которую можно прочитать 1 раз

[ ] -> рабочие ленты.

[ ]

Использует M $O(\log(|x|))$ памяти на раб лентах.

$NL = coNL$

Теорема. $\overline{PATH} \in NL$

Док-во

(I) Сертификат $v \notin C_i$ зная $|C_i|$

(II) Сертификат $v \notin C_i$ зная $|C_{i-1}|$

III) Сертификат $|C_i| = c$ зная $|C_{i-1}|$

Следствие

$S(n) > \log n \Rightarrow NSPACE(S(n)) = coNSPACE(S(n))$