1. Что мы сделали на прошлом занятии?

а) Мы для систематики мн-в ввели понятие покрытия, разбиения, упор. разб-ия и разделения мн-ва X. Ввели правило Σ

б) Ввели понятие дек. пр-я и сформулир. правило пр-я.

в) Ввели понятие k-сочет. без повт. или просто k-подмн-ва n-мн-ва. Используя правило Σ ~~для~~ вывели основное рекурр. соот-е для числа k-подмн-в n-мн-ва, кот. мы назвали биномиальным коэф-том $\binom{n}{k}$.

г) Кроме того, мы комбинаторно и некомбинаторно доказали ряд тождеств для бином. коэф-тов. В комбинаторных д-вах: мы брали целое мн-во (напр., мн-во всех k-сочетаний без повт.), а затем разбивали его на блоки и пользовались правилом Σ.

д) Далее, мы ввели понятие k-сочетания с повторениями (мн-во может в изобилии), и сосчитали кол-во k-сочет. с повт. из n эл-тов $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$, установив вз.-одн. соотв-вие между такими сочетаниями и k-сочет. без повт-ий из $n+k-1$ эл-та.

е) Наконец, используя это понятие, установили еще ряд тождеств для бином. коэф-тов.

---

③ k-перестановки из n эл-тов.

1. Еще раз Опр-е $\exists$ X-мн-во из n эл-тов $\{x_1,\dots,x_n\}$. Упорядоченный ~~кортеж элементов~~ набор $(a_1,\dots,a_k)$ эл-тов $a_i \in X$ мн-ва X называется:

1) кортежем из k эл-тов мн-ва X.
2) k-перестановкой из n эл-тов
3) k-размещением из n эл-тов
4) упорядоченной k-выборкой из n эл-тов
5) k-мерным вектором над мн-вом X
6) k-элементным ~~совокупностью~~ словом над n-эл-тным алфавитом

Теперь: элементы a_i в упорядоченном наборе могут повторяться или не повторяться. В 1-м случае говорят о k-перест. из n эл-тов с повторениями, во 2-м – о k-перест. из n эл-тов без повторений или просто о k-перестан. из n эл-тов, подразумевая, что если не говорится „с повторениями", то эти повторения запрещены.

Пример 1 Номерной ~~знак на автомобиле~~ в паспорте или в каком-то билете в мн-ве $X=\{0,\dots,9\}$

2. ~~Th 1 Число k-перестановок с повторениями $= n^k$~~. Давайте для осязания сов-сти Пример: $\exists$ $X=\{x_1,\dots,x_4\}$; перечислим все 2-перестановки

а) без повторений $(x_1,x_2), (x_1,x_3), (x_1,x_4), (x_2,x_1), (x_3,x_1), (x_4,x_1)$,
$(x_2,x_3), (x_2,x_4), (x_3,x_4), (x_3,x_2), (x_4,x_2), (x_4,x_3)$

б) с повторениями: добавляются еще (x_1,x_1), (x_2,x_2), (x_3,x_3), (x_4,x_4). 2

Видно, что в 1-м случае мы получили 12, а во втором — 16 различных перестановок.

3. Th1 Число k-перестановок с повторениями из n эл-тов $= n^k$.

• Рассматриваем $(a_1,\dots,a_k)$, $a_i \in X$, как слово из k эл-тов над алфавитом из n букв: на 1-е место в слове я могу выбрать $\forall$ из n букв, на 2-е — снова $\forall$ из n букв... $\Rightarrow$ по правилу произв... •

Пример. 1) Имеется сейф, в кот. имеется секретный замок; для открытия сейфа нужно набрать код из 5 символов (тайное слово) с пом. 5 дисков, на кот. нанесено 12 цифр и букв. Сколько $\exists$ разл. кодов?

Ответ: 12^5.

Важный пример №2 2) Еще раз (комбинаторно) сосчитаем число подмн-в данного мн-ва X. Для этого используем комбинаторный принцип биекции, а именно, установим вз-одн. соотв-е между мн-вом всех подмн-в мн-ва X и мн-вом битовых строк $\{01\dots10\}$ длины n. Формально для $\forall$ подмн-ва Y мн-ва X $f(Y) = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i = 1$, если $x_i \in Y$, $\varepsilon_i = 0$, если $x_i \notin Y$.

Например, $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$; $Y = \{x_1,x_3\} \Rightarrow f(Y) = (1,0,1,0)$. Очевидно, что это — вз-одн. соотв-е. $\Rightarrow$ кол-во эл-тов в этих мн-вах равны.

Ну а кол-во битовых строк длины n мы легко можем сосчитать — оно $=$ числу n-перестановок из 2-х эл-тов, т.е. 2^n.

4. Th2 Число k-перестановок без повт. из n эл-тов $= (n)_k = n(n-1)\dots(n-k+1) =: P(n,k)$

• На 1-е место в слове я могу поставить $\forall$ букву из n, на 2-е — $\forall$ из оставшихся $(n-1)$... •

Задание №1 а) Д-ть (формально и комбинаторно), что числа $P(n,k)$ удовл-ют след. рекурр. соотношению:

$$P(n,k) = P(n-1,k) + k\cdot P(n-1,k-1), \quad n \geq 1, \quad k = 1,\dots,n.$$

Нач. условия: $P(n,0) = 1$; $n = 0,1,2,\dots$; $P(n,k) = 0$, $k > n$.

б) Нарисовать Δ к на пути (n,k).

5. Замечание Очевидно, что k-перестановка из n эл-тов без повторений это просто упорядоченное k-подмн-во n-мн-ва. Но: имеется ровно $k!$ способов упорядочить это подмн-во $\Rightarrow$ числа $(n)_k$ и $\binom{n}{k}$ связаны соотношением

$$(n)_k = \binom{n}{k} k! \Rightarrow \boxed{\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}}$$

5. Следствие В частном случае $k = n$ говорят о перестановках n эл-тов, число таких перестановок, очевидно, равно

$$P_n \equiv P(n) = n!; \quad P(0) = 0! = 1. \ \oplus$$

$P(n,n) = P(n,n-1) = P(n) = n!$ — выбор первых 1^x $(n-1)$ эл-тов, так сказать, однозначно определяет

6. Замечание. Очевидно, что k-перестановка из n эл-тов без повторений – это просто упорядоченное k-подмн-во n. мн-ва. Но $\forall$ имеется ровно $k!$ способов упорядочить k-подмн-во (число перестановок k эл-тов) $\Rightarrow$ числа $(n)_k$ и $\binom{n}{k}$ связаны соотношением

$$(n)_k = \binom{n}{k} k! \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$$

Часто эту ф-лу дают как опр-е (некомбинаторное) бином. коэф-тов в случае, когда $n \notin \mathbb{Z}_+$, а принадлежит $\mathbb{R}$ или даже $\mathbb{C}$. Именно,

$$\binom{q}{k} := \begin{cases} \frac{q(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1}, & k \in \mathbb{Z}_+ \\ 0, & k<0 \end{cases} \quad \forall q \in \mathbb{C}.$$

В частности,
$$\binom{-1}{3} = \frac{(-1)(-2)(-3)}{3\cdot 2\cdot 1} = -1.$$

---

7. Еще раз: мы с вами разобрали все 4 случая урновых схем: имеется мн-во $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ из n эл-тов („урна"; n различимых шаров); мы выбираем („выборка") k элементов этого мн-ва 4-мя способами:

1) упорядоченная выборка → с повторениями $\Rightarrow n^k$
→ без повторений $\Rightarrow (n)_k$

2) неупорядоченная выборка → с повторениями $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$
→ без повторений $\binom{n}{k}$

Таблица: n различимых шаров в урне

шары на выходе	с возвращением	без возвращения
„различимые" упорядоченные	n^k	$(n)_k$
„неразличимые" неупоряд.	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Эта таблица покрывает 50% всех школьных задач по комбинаторике. ~~Чего~~ Куда деваются оставшиеся 50%?

---

8. Пример. Сколькими способами можно разложить в 2 кармана (различных – напр., левый и правый) 9 монет различного достоинства?

Опасность с урновыми схемами: есть урна, там есть 9 монет; есть 2 места на выходе $\Rightarrow$ ответ: 9^2 вар-тов.

Ответ, естественно, неверный, т.к. реально имеется 2^9 способов: Действительно, $\forall$ монетку я могу положить либо в один, либо во 2-й карман независимо от остальных $\Rightarrow$ по правилу произв. $2\cdot\ldots\cdot 2 = 2^9$ способов.

Это — типичная двойственная задача — задача о раскладке k различных шаров по n различным ящикам. И число способов такой раскладки есть $\underbrace{n\cdot\ldots\cdot n}_{k}=n^k$

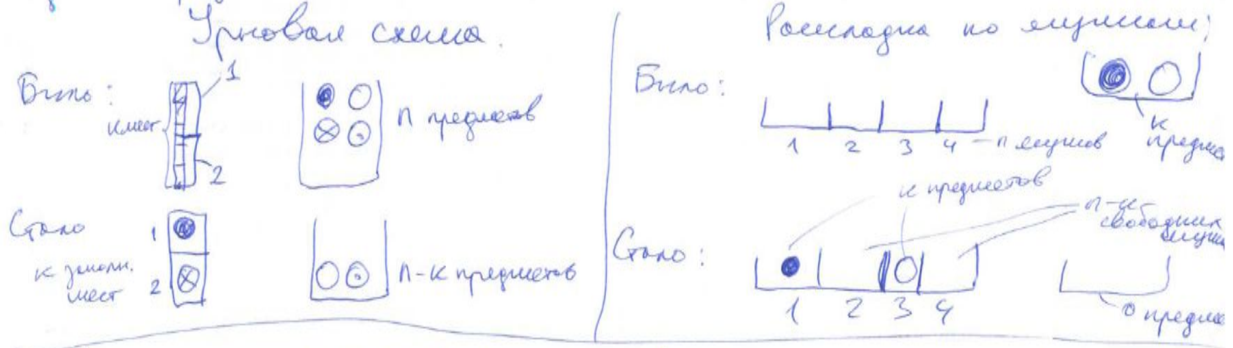
Особенности этой задачи:

1) шары никуда не возвращаются; они остаются в ящике

2) главное: в ∀ ящик (карман) я могу класть ∀ число шаров (в урновой схеме: я на 1 позицию (место под букву) могу поместить лишь одну букву из n-элементного алфавита)

---

9. А какова двойственная задача для числа k-перестановок из n элементов без повторений? Она такова: имеется n различных ящиков и $k<n$ различных предметов. Сколькими способами я могу разложить эти предметы по ящикам при условии, что в ∀ ящике ~~может~~ не может находиться более одного предмета?



В частном случае $n=k$ урновая схема и схема раскладки по ящикам совпадают и дают $n!$ вариантов.

(4) Подсчет числа ~~функ~~ отображений конечных множ. Число $S(k,n)$ сюръективных отображений.

10. Отмеченные выше задачи (эти задачи традиционно (что и всех запутало) называются с.о.:) можно переформулировать на языке отображений (подсчета различных отображений из множества X в конечное множество Y): ∀ пара множ X, $|X|=n$, Y, $|Y|=k$; f — некоторое отображение из X в Y; тогда:

1) Число всех различных ~~функций~~ отображений $f: X\to Y$ равно k^n — по правилу

2) Число биективных ~~функций~~ отображений $f: X\to Y$ равно $n!$

3) Число инъективных функций $f: K\to N$ равно $(k)_n$.

[Напоминание: инъективное, сюръективное, биектив. отображ.]

А каково число сюръективных функций? На языке раскладок шаров по ящикам: каково число способов раскладки k различных предметов по $n<k$! различным ящикам при условии, что в каждом ящике содержится хотя бы один предмет.

10. Сформулируем теперь двойственную задачу для числа К-сочетаний из n элтов без повторений. Оказ., это — задача о числе раскладок

1) ~~I способ:~~ берем раскладку К различимых предметов по n различимым ящикам при условии, что в ящике не может находиться более 1 предмета; очевидно, что ~~К! таких раскладок~~ соответствуют одной раскладке К неразличимых предметов по ящикам $\Rightarrow \frac{(n)_k}{k!} = \binom{n}{k}$ – это кол-во раскладок К неразличимых предметов по n различ. ящикам при ограничении...

Еще раз: урновая схема: мы выбираем К различимых предметов из n и откладываем их в мешок. Здесь: мы берем к неразличимых шаров и метим ими (кладем их) к различимых ящиков

2) II способ: Покажем непосредственно, что кол-во раскладок К неразл. -//- $= \binom{n}{k}$. Действительно, $\forall$ такой раскладке отвечает выбор К ящиков (различимых) среди n (различимых!) ящиков, в кот. будут лежать предметы, $\Rightarrow$ выделим в линию n ящиков (различимых!) к – отметим подписью; и число выборов таких ящиков – это число выборов К-подмнв n-мнва, т.е. $\binom{n}{k}$

Замечание: В физике: имеются n различимых уровней и К неразличимых частиц. Если действует принцип запрета Паули (т.е. частицы – фермионы), то число размещений ... $= \binom{n}{k}$ – статистика Ферми-Дирака

11. Покажем теперь, что кол-во размещений К неразличимых предметов по n различимым ящикам (при $\forall$ вместимости ящиков) $= \left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$ ~~к-выборки~~

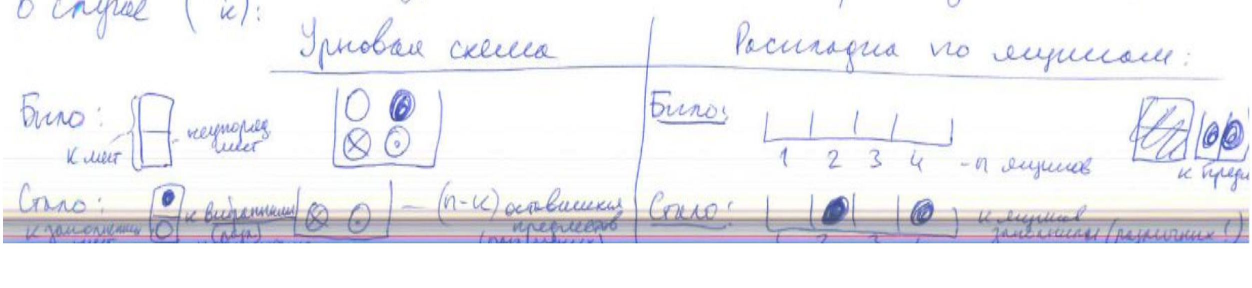
Было: к-мультимнво – мы может в конце (на выходе) мы сложим по ... из n+k-1 различимых элтов

Действит., $\forall$ такое раскрие означает выбор К ящиков из n ящиков с повторением, где выбор i-го ящика r раз отвечает размещению r предметов в i-м ящ. $\Rightarrow$ Урновая схема: ... $\Rightarrow$ это – не что иное, как К-мультимнво над n-мнвом X $\Rightarrow$

Это – статистика Бозе-Эйнштейна (бозоны). В собственные времена ... такие мономы ... $\Rightarrow$ ...

12. Бозу же: число -//- при условии, что в $\forall$ ящике располагается ≥ 1 предметов, равно $\left(\!\binom{n}{k-n}\!\right) = \binom{n+k-n-1}{k-n} = \binom{k-1}{n-1}$

13. Итак, сравнение урновой схемы и схемы раскладки по ящикам в случае $\binom{n}{k}$:



14. Пример. У мамы 2 одинак. ~~груш~~ яблока и 3 одинак. груши. Каждый день в течение 5 дней она дает ребенку по фрукту. Сколькими способами это м.б. сделано?

• Расклады 2-х яблок по 5 ~~разным~~ неразличимым дням $\Rightarrow$ $\binom{5}{2}$ способов. •

---

15. Задачи раскладки неразличимых шаров по различимым ящикам, очев., эквивалентны задачам о т.н. разбиении числа K на n слагаемых (или о композиции числа K). (есть еще разложение)

Рассмотрим след. задачу: сколькими способами можно представить число $K \in \mathbb{N}$ в виде суммы слагаемых

$$a_1 + \ldots + a_n = K \ ? \qquad (*)$$

Это — слишком общий вопрос. Если порядок различных слагаемых важен, т.е. когда случаи

$$1+3+3+3=10 \quad \text{и} \quad 3+3+1+3=10$$

различны, ~~то гов. о~~ (слагаемые — упорядочены), то гов. о разбиении числа K на n слагаемых. Именно его мы и рассмотрим.

(Случай, когда порядок слагаемых ~~не важен~~ наз. разложением числа K, связан с гораздо более сложной задачей раскладки неразл. предметов по неразлич. ящикам и будет рассмотрен ~~далее~~ позже.)

1). Th Число ~~решений~~ ~~разбиений~~ разбиений ~~разложений~~ K на n слагаемых при ограничении $a_i = 0$ или 1 для $\forall i = 1, \ldots, n$ равно $\binom{n}{k}$.

• $\forall$ такое решение отвечает размещению K единиц в n различимых (порядок слагаемых — важен) — ящиках $\Rightarrow$ … •

2) Th. Число ~~решений~~ разбиений ~~разложений~~ K на n слагаемых при условии $a_i \geq 0$ (число слабых композиций $(a_1, \ldots, a_n)$ числа K) = ((

• Опять-таки, $\forall$ такое решение отвечает размещению K единиц в n различимых ящиков с повторениями $\Rightarrow$ … •

а) Th (Задание 2) Число разбиений ~~разложений~~ при ограничениях — Следствие: число положит. разложений равно $\binom{K-1}{n-1}$

$$a_i \geq s_i \ , \ i = 1, \ldots, n$$

для чисел s_i: $s = s_1 + \ldots + s_n \leq K$, равно $\left(\!\binom{n}{K-s}\!\right) = \binom{n+K-s-1}{n-1}$ • Положим $y_i = x_i - s_i$, получим $y_1 + \ldots + y_n = K$ …

б) Th ~~(Задание 2)~~ — // — $a_i \leq m_i$, $i = 1, \ldots, n$: $m = m_1 + \ldots + m_n \geq K$, равно $\left(\!\binom{n}{m-K}\!\right)$ • Положим $z_i = m_i - x_i$, получим ур. $z_1 + \ldots + z_n = m - K \Rightarrow$ … •