Раскраска графов.

17 февраля 2017 г.

1. Дан граф $K_{4,4}$ с долями $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Граф G получен из $K_{4,4}$ удалением ребер $x_i y_i$ для любого i. Предъявите упорядочинение вершин, при котором жадный алгоритм покрасит граф в а) два цвета б) четыре цвета. Обобщите результат для графа $K_{n,n}$ вместо графа $K_{4,4}$.

2. Доказать, что в любом графе G существует такое линейное упорядочение его вершин, при котором жадный алгоритм раскраски окрасит вершины графа ровно в $\chi(G)$ цветов.

3. Доказать, что для любого графа G, построенного на n вершинах, справедливо неравенство

   $$\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n,$$

   где $\alpha(G)$ — количество вершин в наибольшем вершинно независимом множестве графа G. Верно ли, что для любого k-хроматического графа можно найти такую правильную окраску его вершин в k цветов, что хотя бы одно из подмножеств одноцветных вершин имело мощность, равную $\alpha(G)$?

4. Докажите $\chi(G) \cdot (\chi(G) - 1) \leq 2|E(G)|$.

5. Доказать, что любой граф G с $\chi(G) = k$ имеет по крайней мере k вершин, степень которых больше или равна $k - 1$.

6. Доказать, что для графа G, в котором любая пара нечетных циклов пересекается хотя бы по одной вершине, хроматическое число не больше 5.

7. Доказать, что для любого графа G на n вершинах выполнены следующие неравенства:

   $$\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \geq n, \chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1.$$