20 ноября 2017

Количество баллов на зачет: *7*

1. *(1.5 балла)* Найти максимальный поток и минимальный разрез между вершинами 1 и 8 в графе, изображенном на рис.1.

2. *(1 балл)* Рассмотрим сеть, изображенную на рис.2. Величина пропускной способности ребра (x_4, x_3) равна $r = (\sqrt{5}-1)/2$ и удовлетворяет уравнению вида $r^2 = 1 - r$. Будем искать максимальный поток в этой сети алгоритмом Форда-Фалкерсона. В качестве первого увеличивающего поток пути возьмём путь (s, x_2, x_3, t). Затем будем увеличивать поток вдоль путей в следующем порядке: $p_1, p_2, p_1, p_3, p_1, p_2, p_1, p_3, \ldots$, где $p_1 = (s, x_4, x_3, x_2, x_1, t)$, $p_2 = (s, x_2, x_3, x_4, t)$, $p_3 = (s, x_1, x_2, x_3, t)$. Показать, что при стремлении количества n итераций к бесконечности величина потока не будет стремится к величине максимального потока в этой сети.

3. *(1.5 балла)* Для формирования ученого совета университета необходимо выбрать одного преподавателя от каждой из k университетских кафедр, k — натуральное число, делящееся на три. Один и тот же преподаватель может быть приписан к одной или нескольких кафедр, но может быть выбран в ученый совет только от одной из них. На кафедре работают профессора, доценты и ассистенты. В ученый совет должно входить одинаковое количество преподавателей от каждой из этих трех групп. Описать алгоритм выбора преподавателей в ученый совет.

4. *(1.5 балла)* После проведения некоторого количества матчей в спортивном турнире команда X набрала известное нам количество побед. Если команда выиграет все оставшиеся матчи, в которых она участвует, то она наберёт W побед. Могут ли остальные матчи завершиться так, чтобы X стала победителем в турнире? Для ответа на поставленный вопрос мы создадим следующего вида сеть:

   (a) Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — все команды кроме команды X. Добавим во множество вершин сети вершины $x_1, \ldots, x_n$, соответствующие этим командам.

   (b) Добавим также в сеть $\binom{n}{2}$ вершин с пометками $y_{i,j}$ — по вершине для каждой неупорядоченной пары различных команд $\{X_i, X_j\}$. В вершину $y_{i,j}$ направим ребра бесконечной пропускной способности из вершин x_i и x_j.

   (c) Добавим в сеть исток s и сток t.

   (d) Из истока в каждую из вершин x_i будет идти ребро пропускной способности $W - w_i$, где w_i — количество выигранных командой X_i матчей. Из каждой вершины $y_{i,j}$ в сток направим ребро пропускной способности $a_{i,j}$, равной количеству матчей, в которых команда X_i встретится с командой X_j.

   Докажите, что максимальный поток в этой сети равен величине $\sum_{i,j} a_{i,j}$ тогда и только тогда, когда команды могут сыграть так, чтобы ни одна из них не выиграла больше W матчей.

5. *(2 балла)* Рассмотрим два набора $\mathbf{p} := (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ и $\mathbf{q} := (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ неотрицательных целых чисел. Говорят, что пара $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ реализуема в виде простого двудольного графа G, если существует простой двудольный граф G с долями $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, такой, что $\deg(x_i) = p_i$ и $\deg(y_j) = q_j$ для всех $i \in [1, m]$ и $j \in [1, n]$.

   (a) Свести задачу проверки заданной пары $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ на реализуемость в виде простого двудольного графа G к задаче о нахождении максимального потока в сети.

   (b) Доказать, что пара $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ реализуема в виде простого двудольного графа тогда и только тогда, когда

   $$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j \qquad \text{и} \qquad \sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, k\} \geq \sum_{j=1}^{k} q_j, \quad 1 \leq k \leq n$$

   при условии, что числа q_j упорядочены по невозрастанию: $q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_n$.

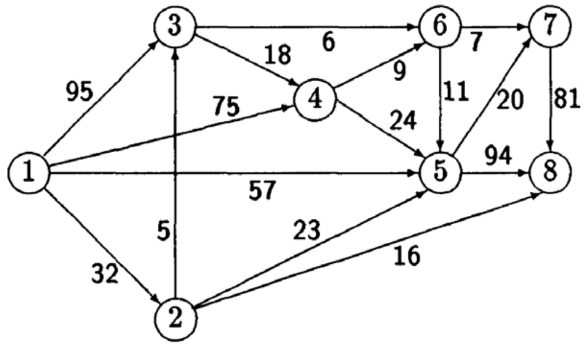

Рис. 1

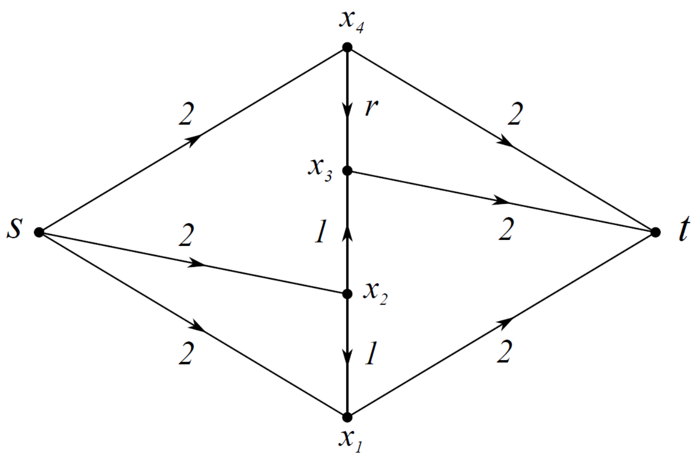

Рис. 2

6. *(2 балла)* Доказать вершинную теорему Менгера для ориентированных графов с помощью теоремы Форда-Фалкерсона.

7. *(2 балла)* Доказать вершинную теорему Менгера для неориентированных графов с помощью теоремы Форда-Фалкерсона.