1. (1) Докажите, что конечное метрическое пространство с целыми расстояниями изометрично подмножеству некоторого связного графа (с обычной метрикой на графе).

2. Для огарниченных подмножеств A, B метрчиеского пространства (X, ρ) определим расстояние Хаусдорфа между ними как

$$d(A, B) = \max\left(\sup_{b\in B}\left(\inf_{a\in A}\rho(b, a)\right), \sup_{a\in A}\left(\inf_{b\in B}\rho(a, b)\right)\right).$$

Является ли метрика Хаусдорфа

а) (1) метрикой на ограниченных подмножествах в X?

б) (2) полуметрикой на них (отличие от метрики — что допускаются нулевые расстояние между разными точками)?

в) (1) метрикой на ограниченных замкнутых подмножествах в X? (Множество $A \subset X$ называется замкнутым, если его дополнение $X \setminus A$ открыто.)

3. Пусть $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ — метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ назовем коротким, если $\rho_Y(f(a), f(b))) \leq \rho_X(a, b)$ для любых точек a, b в X — иными словами, если оно не увеличивает расстояния между точками.

а) (3) Докажите, что если X — метрическое пространство, X_1 — его подмножество такое, что множество $X \setminus X_1$ конечно, то короткое отображение $f : X_1 \to \mathbb{R}$ может быть продолжено на X как короткое.

б) (1) Верно ли то же для отображений в любое метрическое пространство?

4. а) (3) Докажите, что в полном метрическом пространстве вложенные шары с радиусами, стремящимися к 0, имеют общую точку. б) (3) Существенно ли условие, что радиусы стремятся к 0?

5. (4) Всегда ли сепарабельное метрическое пространство можно покрыть последовательностью шаров, радиусы которых стремятся к 0?

6. а) (2) Докажите, что неубывающее отображение f из отрезка $[0, 1]$ в себя имеет неподвижную точку (то есть такую точку x, что $f(x) = x$).

б) (2) Докажите то же, если вместо отрезка рассматривается произвольное ограниченное замкнутое подмножество числовой прямой.