9 Домашнее задание

9.1 (1 балл)**.** Решить с помощью экспоненциальных производящих функций следующие линейные рекуррентные соотношения:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n, \qquad a_0 = a_1 = 1,$$
$$a_n = na_{n-1} + n(n-1)a_{n-2}, \qquad a_0 = a_1 = 1.$$

9.2 (2,5 балла)**.** Вычислить собственные значения матрицы вида

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9.3 (2 балла)**.** Определить количество a_n способов замостить доску размером $3 \times n$ костяшками домино.

9.4 (1,5 балла)**.** Пусть δ_n есть количество делителей d числа n. Обозначим через $\delta(z)$ функцию Дирихле, отвечающую этой числовой последовательности $(\delta_1, \delta_2, \dots)$. Выразить $\delta(z)$ через ζ-функцию Римана.

9.5 (1,5 балла)**.** Пусть коэффициенты μ_n функции Мебиуса $\mu(z)$ рассчитываются по формулам

$$\mu_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ (-1)^s, & \begin{array}{l}\text{если в каноническом разложении } n \text{ на простые множители } n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s} \\ \text{все показатели } \alpha_i = 1,\end{array} \\ 0, & \text{если в этом разложении существует хотя бы одно } \alpha_i > 1. \end{cases}$$

Доказать равенство $\zeta(z) \cdot \mu(z) = I(z)$, то есть доказать, что

$$\sum_{d \backslash n} \mu_d = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

9.6 (1,5 балла)**.** Функцией Эйлера $\varphi(z)$ называется формальный степенной ряд вида

$$\varphi(z) = \frac{\varphi_1}{1^z} + \frac{\varphi_2}{2^z} + \dots + \frac{\varphi_n}{n^z} + \dots,$$

коэффициенты φ_n которой подсчитывают количество чисел $0 < d < n$, меньших n и взаимно-простых с ним. Доказать, что для любого $n \geqslant 0$ справедливо тождество

$$n = \sum_{d \backslash n} \varphi_d.$$

9.7 (1 балл)**.** Показать, что на языке рядов Дирихле доказанное в предыдущем упражнении тождество для чисел φ_d переписывается в виде

$$\zeta(z-1) = \zeta(z) \cdot \varphi(z).$$

9.8 (1,5 балла)**.** Доказать следующую явную формулу для вычисления коэффициентов φ_n функции Эйлера:

$$\varphi_n = \sum_{d\backslash n} \mu_d \, \frac{n}{d} = n \sum_{d\backslash n} \frac{\mu_d}{d}. \tag{1}$$

9.9 (1,5 балла)**.** Доказать эквивалентность доказанной в предыдущем упражнении формулы (1) и формулы

$$\varphi_n = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$

где $p_1, p_2, \dots, p_k$ — различные простые множители числа $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$.

9.10 (2,5 балла)**.** Рассмотрим число $N_n(k)$ циклических последовательностей длины k над алфавитом из $n > 1$ букв. Если бы все буквы в любой такой последовательности были бы различны, то общее количество этих последовательностей было бы в k раз меньше количества n^k всех строк длины k над n-элементным алфавитом. Однако в данной задаче это условие не выполняется.

Пусть $M_n(d)$ есть количество циклических последовательностей длины d над алфавитом из $n > 1$ букв, переходящих в себя лишь при вращениях на углы, кратные 2π. Показать справедливость равенств

$$\sum_{d\backslash k} M_n(d) = N_n(k) \qquad \text{и} \qquad \sum_{d\backslash k} d\, M_n(d) = n^k.$$

9.11 (1,5 балла)**.** Используя доказанные в предыдущем упражнении равенства, формулы обращения Мебиуса, а также соотношение (1), получить следующие явные выражения для чисел $M_n(k)$ и $N_n(k)$:

$$M_n(k) = \frac{1}{k} \sum_{d\backslash k} \mu_d \, n^{k/d}, \qquad N_n(k) = \frac{1}{k} \sum_{d\backslash k} \varphi_d \, n^{k/d}.$$