

14 сентября 2017

Количество баллов на зачет: **9**

1. (2 балла) Сколько существует шестизначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 47?
2. (1 балла) Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два поля, не лежащие на одной горизонтали или вертикали?
3. (2 балла) Рассмотрим все пятизначные положительные числа, в которых присутствует хотя бы одна девятка. Сколько таких чисел делится на три?
4. (1 балла) В алфавите племени Бум-Бум всего шесть букв. Любое слово состоит у них из шести символов, причем в каждом таком слове должны быть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько всего слов в языке племени Бум-Бум?
5. (2 балла) Доказать комбинаторно следующее тождество:

$$\binom{n+1}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{k-i}$$

С его помощью доказать справедливость равенства

$$\binom{n+k}{n+1} = \sum_{i=0}^k \binom{n+k-i-1}{n}$$

6. (2 балла) Подсчитать количество разбиений числа  $k$  при ограничениях

$$a_i \geq s_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad s_1 + s_2 + \dots + s_n =: s \leq k.$$

7. (1 балла) Восемь студентов выбирают себе спецкурсы на семестр из списка, состоящего из четырех спецкурсов. Сколькими способами студенты могут записаться на эти спецкурсы так, чтобы каждый студент записался хотя бы на один спецкурс?
8. (1.5 балла) Сколько существует бинарных (т.е. состоящих из цифр 0 и 1) строк длины  $n$ , содержащих  $k$  единиц? А бинарных строк длины  $n$ , содержащих  $k$  единиц и таких, в которых никакие две единицы не стоят рядом?
9. (2 балла) В классическом домино используются кости, разделенные на две части, каждая из которых содержит от нуля до шести точек. Сколько костей существует в обобщенном домино, в котором любая из частей содержит от нуля до  $n$  точек? Сколько существует пар таких костей? Сколькими способами из костей обобщенного домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу?
10. (2 балла) В игре нарды 15 белых и 15 черных шашек стоят на 24 полях так, что каждое поле либо пустое, либо занято несколькими белыми шашками, либо занято несколькими черными шашками. Сколькими способами можно так расставить шашки на доске?