

Задание 12 (на 30.11, в письменном виде).

а)

ML 59. Пусть сигнатура содержит только одноместные предикатные символы. Покажите, что:

- а) всякая выполнимая формула, содержащая n предикатных символов, выполнима и в интерпретации, в носителе которой не более 2^n элементов;
- б) существует алгоритм, проверяющий выполнимость таких формул.

ML 60. Покажите, что:

- а) если формула $A(x)$ выводима, то выводима и формула $\forall xA(x)$;
- б) множество выводимых формул не изменится, если мы добавим правило обобщения $\frac{A(x)}{\forall xA(x)}$, а правила Бернаиса заменим на две новые аксиомы: $(\forall x(A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow \forall xB)$ и $(\exists x(B \rightarrow A)) \rightarrow (\exists xB \rightarrow A)$, в этих аксиомах x не входит в A свободно.

ML 61. Покажите, что:

- а) если $A \rightarrow B$ выводима, то и $\exists xA \rightarrow \exists xB$ выводима;
- б) формула $\forall xA(x) \rightarrow \forall yA(y)$ выводима.

ML 62. Приведите пример формулы, которая истинна во всех интерпретациях с конечным носителем, но не является общезначимой.

Пусть I — интерпретация. Теорией $Th(I)$ называется множество замкнутых формул, которые истинны в интерпретации I .

ML 63. Постройте две неизоморфные интерпретации теории $Th(\mathbb{Q}, <, =)$ (плотный линейный порядок без первого и последнего элемента) мощности континуум.

ML 51. Будет ли интерпретация $(\mathbb{N}, =, <)$ элементарно эквивалентна: $(\mathbb{N} + \mathbb{Z}, =, <)$. А будут ли эти интерпретации изоморфны?

ML 53.

- а) Покажите, что естественные интерпретации $(=, +, *, 0, 1)$ для всех алгебраически замкнутых полей характеристики 0 являются элементарно эквивалентными.
- б) Для двух алгебраически замкнутых полей k_1 и k_2 характеристики 0 выполняется, что k_1 является надполем поля k_2 . Покажите, что естественная интерпретация $(=, +, *, 0, 1)$ в поле k_1 является элементарным расширением естественной интерпретации $(=, +, *, 0, 1)$ в поле k_2 .
- в) Докажите теорему Гильберта о нулях: всякая система полиномиальных уравнений с коэффициентами в алгебраически замкнутом поле характеристики ноль, имеющее решение в расширении поля, имеет решение и в самом поле.
- г) Докажите переформулировку теоремы Гильберта о нулях: если система полиномиальных уравнений $\bigwedge_{i=1}^k P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ не имеет решения в некотором алгебраически замкнутом поле характеристики 0, то найдутся такие многочлены $Q_1(x_1, \dots, x_n), \dots, Q_k(x_1, \dots, x_n)$, что $\sum_i Q_i P_i = 1$.

ML 58. Заменим 11-ую аксиому $A \vee \neg A$ на $\neg\neg A \rightarrow A$. Покажите, что множество выводимых формул не изменится.