

Остается:

Приведите пример сепарабельного метрического пространства, которое нельзя покрыть последовательностью шаров с радиусами, стремящимися к 0.

При каких C сходится последовательность $\sin(C \cdot 10^n)$?

Новое

1. (1) Найдите $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{(x+a_1) \dots (x+a_k)} - x$, где a_1, \dots, a_k — данные вещественные числа.

Напомним, что число e определяется как предел (возрастающей) последовательности $(1 + 1/n)^n$ или, что то же самое, как предел убывающей последовательности $(1 + 1/n)^{n+1}$.

2. (2) Докажите, что $n! > (n/e)^n$. при всех натуральных n .

3. (1) Найдите $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{m}{x^m-1} - \frac{n}{x^n-1}$ (m, n — натуральные числа).

4. (2) Докажите, что при любом вещественном a последовательность $(1 + a/n)^n$ имеет конечный предел $f(a)$, функция f возрастает на все оси и $f(a+b) = f(a)f(b)$.

5. (2) Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq k \leq 2n} 2^{-nk/(n+k)}$.

6. (3) Пусть a_1, a_2, \dots — положительные числа. Докажите, что верхний предел последовательности $(\frac{1+a_n}{a_{n-1}})^n$ не меньше, чем e .