

Теория категорий

Определение категорий

Валерий Исаев

07 сентября 2015 г.

Определение категорий

Примеры

Графы и диаграммы

Литература

- ▶ Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1998
- ▶ R. Goldblatt, *Topoi: The categorical analysis of logic*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 2006
- ▶ Peter T. Johnstone, *Sketches of an elephant : a topos theory compendium. vol. 1*, Oxford Logic Guides, Clarendon Press, Oxford, 2002, Autre tirage : 2008
- ▶ S. MacLane and I. Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, Springer New York, 1992
- ▶ F. Borceux, *Handbook of categorical algebra: Volume 1, basic category theory*, Cambridge Textbooks in Linguistics, Cambridge University Press, 1994

Мотивация

- ▶ В различных контекстах один и тот же объект может иметь различные описания.

Мотивация

- ▶ В различных контекстах один и тот же объект может иметь различные описания.
- ▶ Множества: \mathbb{N} , \mathbb{Z} и \mathbb{Q} .

Мотивация

- ▶ В различных контекстах один и тот же объект может иметь различные описания.
- ▶ Множества: \mathbb{N} , \mathbb{Z} и \mathbb{Q} .
- ▶ Группы: $(\{0, 1\}, +)$ и $\mathbb{Z}/2$.

Мотивация

- ▶ В различных контекстах один и тот же объект может иметь различные описания.
- ▶ Множества: \mathbb{N} , \mathbb{Z} и \mathbb{Q} .
- ▶ Группы: $(\{0, 1\}, +)$ и $Z/2$.
- ▶ Типы в языках программирования: (a, b) и (b, a) .

Мотивация

- ▶ В различных контекстах один и тот же объект может иметь различные описания.
- ▶ Множества: \mathbb{N} , \mathbb{Z} и \mathbb{Q} .
- ▶ Группы: $(\{0, 1\}, +)$ и $Z/2$.
- ▶ Типы в языках программирования: (a, b) и (b, a) .
- ▶ Еще пример: *Bool* и *Maybe ()*.

Изоморфизмы

- ▶ Когда два различных представления A и B задают один и тот же объект?

Изоморфизмы

- ▶ Когда два различных представления A и B задают один и тот же объект?
- ▶ Когда существует пара «функций» $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$, преобразующих «элементы» A в «элементы» B и обратно.

Изоморфизмы

- ▶ Когда два различных представления A и B задают один и тот же объект?
- ▶ Когда существует пара «функций» $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$, преобразующих «элементы» A в «элементы» B и обратно.
- ▶ И эти функции взаимобратны.

Изоморфизмы

- ▶ Когда два различных представления A и B задают один и тот же объект?
- ▶ Когда существует пара «функций» $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$, преобразующих «элементы» A в «элементы» B и обратно.
- ▶ И эти функции взаимнообратны.
- ▶ Пример: $f = g = \lambda(x, y) \rightarrow (y, x) : (a, b) \rightarrow (b, a)$.

Изоморфизмы

- ▶ Когда два различных представления A и B задают один и тот же объект?
- ▶ Когда существует пара «функций» $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$, преобразующих «элементы» A в «элементы» B и обратно.
- ▶ И эти функции взаимнообратны.
- ▶ Пример: $f = g = \lambda(x, y) \rightarrow (y, x) : (a, b) \rightarrow (b, a)$.
- ▶ Пример:

$f = \lambda x \rightarrow \text{if } x \text{ then } \text{Just } () \text{ else } \text{Nothing} : \text{Bool} \rightarrow \text{Maybe } ()$

$g = \text{maybe } \text{True } (\text{const } \text{False}) : \text{Maybe } () \rightarrow \text{Bool}$

Определение категории

Категория \mathbf{C} состоит из:

- ▶ Коллекции объектов $Ob(\mathbf{C})$ и коллекции морфизмов $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ для любой пары объектов $X, Y \in Ob(\mathbf{C})$. Обычно вместо $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ мы будем писать $f : X \rightarrow Y$.

Определение категории

Категория \mathbf{C} состоит из:

- ▶ Коллекции объектов $Ob(\mathbf{C})$ и коллекции морфизмов $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ для любой пары объектов $X, Y \in Ob(\mathbf{C})$. Обычно вместо $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ мы будем писать $f : X \rightarrow Y$.
- ▶ Операции, сопоставляющей каждому объекту $X \in Ob(\mathbf{C})$ морфизм $id_X : X \rightarrow X$.

Определение категории

Категория \mathbf{C} состоит из:

- ▶ Коллекции объектов $Ob(\mathbf{C})$ и коллекции морфизмов $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ для любой пары объектов $X, Y \in Ob(\mathbf{C})$. Обычно вместо $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ мы будем писать $f : X \rightarrow Y$.
- ▶ Операции, сопоставляющей каждому объекту $X \in Ob(\mathbf{C})$ морфизм $id_X : X \rightarrow X$.
- ▶ Операции, сопоставляющей каждой паре морфизмов $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$ морфизм $g \circ f : X \rightarrow Z$.

Определение категории

Категория \mathbf{C} состоит из:

- ▶ Коллекции объектов $Ob(\mathbf{C})$ и коллекции морфизмов $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ для любой пары объектов $X, Y \in Ob(\mathbf{C})$. Обычно вместо $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ мы будем писать $f : X \rightarrow Y$.
- ▶ Операции, сопоставляющей каждому объекту $X \in Ob(\mathbf{C})$ морфизм $id_X : X \rightarrow X$.
- ▶ Операции, сопоставляющей каждой паре морфизмов $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$ морфизм $g \circ f : X \rightarrow Z$.
- ▶ Эти операции должны удовлетворять следующим свойствам: $g \circ id_X = g$, $id_Y \circ f = f$ и $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Изоморфизмы

- ▶ Морфизм $f : X \rightarrow Y$ называется *изоморфизмом*, если существует морфизм $g : Y \rightarrow X$ такой, что $g \circ f = id_X$ и $f \circ g = id_Y$.

Изоморфизмы

- ▶ Морфизм $f : X \rightarrow Y$ называется *изоморфизмом*, если существует морфизм $g : Y \rightarrow X$ такой, что $g \circ f = id_X$ и $f \circ g = id_Y$.
- ▶ Объекты X и Y называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $f : X \rightarrow Y$.

Изоморфизмы

- ▶ Морфизм $f : X \rightarrow Y$ называется *изоморфизмом*, если существует морфизм $g : Y \rightarrow X$ такой, что $g \circ f = id_X$ и $f \circ g = id_Y$.
- ▶ Объекты X и Y называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $f : X \rightarrow Y$.
- ▶ Если X – объект категории \mathbf{C} , то *моноид эндоморфизмов* X (обозначение: $End_{\mathbf{C}}(X)$) – это множество $Hom_{\mathbf{C}}(X, X)$ с операцией композиции в качестве бинарной операции моноида, и id_X в качестве единицы.

Изоморфизмы

- ▶ Морфизм $f : X \rightarrow Y$ называется *изоморфизмом*, если существует морфизм $g : Y \rightarrow X$ такой, что $g \circ f = id_X$ и $f \circ g = id_Y$.
- ▶ Объекты X и Y называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $f : X \rightarrow Y$.
- ▶ Если X – объект категории \mathbf{C} , то *моноид эндоморфизмов* X (обозначение: $End_{\mathbf{C}}(X)$) – это множество $Hom_{\mathbf{C}}(X, X)$ с операцией композиции в качестве бинарной операции моноида, и id_X в качестве единицы.
- ▶ Если X – объект категории \mathbf{C} , то *группа автоморфизмов* X (обозначение: $Aut_{\mathbf{C}}(X)$) – это множество изоморфизмов $f : X \rightarrow X$ с операциями, определенными аналогичным предыдущему пункту образом.

План лекции

Определение категорий

Примеры

Графы и диаграммы

Категория **Set**

- ▶ Объекты категории **Set** – множества.
- ▶ $\text{Hom}_{\text{Set}}(X, Y)$ – множество функций из X в Y .
- ▶ id_X – тождественная функция: $\text{id}_X(x) = x$.
- ▶ $g \circ f$ – композиция функций: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
- ▶ Изоморфизмы – биекции.

Категория \mathbf{Set}_{fin}

- ▶ Объекты категории \mathbf{Set} – конечные множества.
- ▶ $\mathit{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$ – множество функций из X в Y .
- ▶ id_X – тождественная функция: $id_X(x) = x$.
- ▶ $g \circ f$ – композиция функций: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
- ▶ Множества изоморфны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое число элементов.

Категория **Grp**

- ▶ Объекты категории **Grp** – группы.
- ▶ $\text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, H)$ – множество гомоморфизмов групп G и H .
- ▶ id_G – тождественный гомоморфизм: $id_G(x) = x$.
- ▶ $g \circ f$ – композиция гомоморфизмов: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Категория **Vec**

- ▶ Объекты категории **Vec** – конечномерные векторные пространства.
- ▶ $\text{Hom}_{\mathbf{Vec}}(V, W)$ – множество линейных операторов из V в W .
- ▶ id_V – тождественный линейный оператор.
- ▶ $g \circ f$ – композиция линейных операторов.

Категория **Hask**

- ▶ Объекты категории **Hask** – типы хаскелла.
- ▶ $\text{Hom}_{\text{Hask}}(A, B)$ – множество функций хаскелла, имеющих тип $A \rightarrow B$.
- ▶ id_A – тождественная функция: $id_A = \lambda x \rightarrow x$.
- ▶ $g \circ f$ – композиция функций: $g \circ f = \lambda x \rightarrow g (f x)$.

Категория **Mat**

- ▶ Объекты категории **Mat** – натуральные числа.
- ▶ $\text{Hom}_{\text{Mat}}(n, k)$ – множество матриц над \mathbb{R} размера $n \times k$.
- ▶ id_n – единичная матрица размера $n \times n$.
- ▶ $A \circ B$ – произведение матриц.
- ▶ Матрица является изоморфизмом тогда и только тогда, когда она обратима.

Категория **Num**

- ▶ Объекты категории **Num** – натуральные числа.
- ▶ $\text{Hom}_{\text{Num}}(n, k)$ – множество кортежей (a_1, \dots, a_n) таких, что $1 \leq a_i \leq k$
- ▶ $\text{id}_n = (1, \dots, n)$.
- ▶ $(b_1, \dots, b_k) \circ (a_1, \dots, a_n) = (b_{a_1}, \dots, b_{a_n})$.

План лекции

Определение категорий

Примеры

Графы и диаграммы

Графы

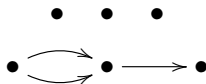
- ▶ *Граф* состоит из коллекции вершин V и коллекции ребер $E(X, Y)$ для любой пары вершин $X, Y \in V$.

Графы

- ▶ *Граф* состоит из коллекции вершин V и коллекции ребер $E(X, Y)$ для любой пары вершин $X, Y \in V$.
- ▶ Любой категории можно сопоставить граф.

Графы

- ▶ *Граф* состоит из коллекции вершин V и коллекции ребер $E(X, Y)$ для любой пары вершин $X, Y \in V$.
- ▶ Любой категории можно сопоставить граф.
- ▶ Примеры:



Диаграммы

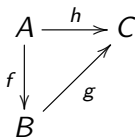
- ▶ *Диаграмма* – граф, вершины которого являются объектами некоторой категории, а ребра – морфизмами.

Диаграммы

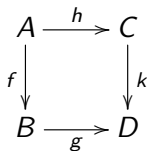
- ▶ *Диаграмма* – граф, вершины которого являются объектами некоторой категории, а ребра – морфизмами.
- ▶ Диаграмма является *коммутативной*, если для любой пары вершин в графе X и Y , композиция любого пути из X в Y дает один и тот же результат.

Диаграммы

- ▶ *Диаграмма* – граф, вершины которого являются объектами некоторой категории, а ребра – морфизмами.
- ▶ Диаграмма является *коммутативной*, если для любой пары вершин в графе X и Y , композиция любого пути из X в Y дает один и тот же результат.
- ▶ Примеры:



$$g \circ f = h$$



$$g \circ f = k \circ h$$

Склейка диаграмм

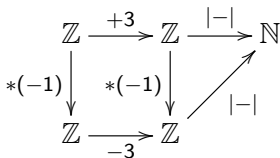
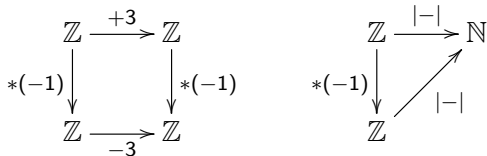
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{+3} & \mathbb{Z} \\ \downarrow *(-1) & & \downarrow *(-1) \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{-3} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Склейка диаграмм

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{+3} & \mathbb{Z} \\ \downarrow *(-1) & & \downarrow *(-1) \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{-3} & \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{|\cdot|} & \mathbb{N} \\ \downarrow *(-1) & \nearrow & \downarrow |\cdot| \\ \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \end{array}$$

Склейка диаграмм



Частные случаи категорий

- ▶ Категории, в которых все морфизмы имеют вид id_X , называются *дискретными*.

Частные случаи категорий

- ▶ Категории, в которых все морфизмы имеют вид id_X , называются *дискретными*.
- ▶ Категории с ровно одним объектом – моноиды.

Частные случаи категорий

- ▶ Категории, в которых все морфизмы имеют вид id_X , называются *дискретными*.
- ▶ Категории с ровно одним объектом – моноиды.
- ▶ Категории, в которых все множества $Hom(X, Y)$ содержат максимум один элемент, – предпорядки.

Частные случаи категорий

- ▶ Категории, в которых все морфизмы имеют вид id_X , называются *дискретными*.
- ▶ Категории с ровно одним объектом – моноиды.
- ▶ Категории, в которых все множества $Hom(X, Y)$ содержат максимум один элемент, – предпорядки.
- ▶ Категории, в которых все морфизмы являются изоморфизмами, называются *группоидами*.

Частные случаи категорий

- ▶ Категории, в которых все морфизмы имеют вид id_X , называются *дискретными*.
- ▶ Категории с ровно одним объектом – моноиды.
- ▶ Категории, в которых все множества $Hom(X, Y)$ содержат максимум один элемент, – предпорядки.
- ▶ Категории, в которых все морфизмы являются изоморфизмами, называются *группоидами*.
- ▶ Категории, в которых изоморфные объекты равны, называются *скелетными*.

Малые категории

- ▶ Если коллекция всех морфизмов категории является множеством, то такая категория называется *малой*. Категории, которые не (обязательно) являются малыми, называют *большими*.

Малые категории

- ▶ Если коллекция всех морфизмов категории является множеством, то такая категория называется *малой*. Категории, которые не (обязательно) являются малыми, называют *большими*.
- ▶ Что точно означают эти понятия зависит от формализма, в котором мы работаем.

Малые категории

- ▶ Если коллекция всех морфизмов категории является множеством, то такая категория называется *малой*. Категории, которые не (обязательно) являются малыми, называют *большими*.
- ▶ Что точно означают эти понятия зависит от формализма, в котором мы работаем.
- ▶ Например, в ZFC вводится понятие класса, и большие категории – это категории, коллекция объектов которых является классом.

Малые категории

- ▶ Если коллекция всех морфизмов категории является множеством, то такая категория называется *малой*. Категории, которые не (обязательно) являются малыми, называют *большими*.
- ▶ Что точно означают эти понятия зависит от формализма, в котором мы работаем.
- ▶ Например, в ZFC вводится понятие класса, и большие категории – это категории, коллекция объектов которых является классом.
- ▶ Если мы будем формализовывать категории в теории типов, то объекты малых категории лежат в Set_0 , а объекты больших в Set_1 .

Малые категории

- ▶ Если коллекция всех морфизмов категории является множеством, то такая категория называется *малой*. Категории, которые не (обязательно) являются малыми, называют *большими*.
- ▶ Что точно означают эти понятия зависит от формализма, в котором мы работаем.
- ▶ Например, в ZFC вводится понятие класса, и большие категории – это категории, коллекция объектов которых является классом.
- ▶ Если мы будем формализовывать категории в теории типов, то объекты малых категории лежат в Set_0 , а объекты больших в Set_1 .
- ▶ Категории, объекты которых лежат в Set_2 , называются *очень большими*, и так далее.

Локально малые категории

- ▶ Категория называется *локально малой*, если для любых объектов A и B класс $\text{Hom}(A, B)$ является множеством.

Локально малые категории

- ▶ Категория называется *локально малой*, если для любых объектов A и B класс $\text{Hom}(A, B)$ является множеством.
- ▶ Подавляющее большинство категорий, возникающих на практике, являются локально малыми.

Локально малые категории

- ▶ Категория называется *локально малой*, если для любых объектов A и B класс $\text{Hom}(A, B)$ является множеством.
- ▶ Подавляющее большинство категорий, возникающих на практике, являются локально малыми.
- ▶ Любая малая категория является локально малой, но, конечно, не наоборот.